GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

METALİK YAPILARIN TANJANT DEMETLERE TAŞINMASI

Emre Ozan UZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2019

Emre Ozan UZ tarafından hazırlanan "METALİK YAPILARIN TANJANT DEMETLERE TAŞINMASI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 23/01/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emre Ozan UZ
23/01/2019

METALİK YAPILARIN TANJANT DEMETLERE TAŞINMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Emre Ozan UZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu tezde, tam lift yardımıyla bir differensiyellenebilir manifold üzerindeki metalik yapı bu manifoldun tanjant demetine taşınmıştır. Daha sonra, tanjant demete taşınan bu metalik yapının integrallenebilirliği ve parelelliği hakkında gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Son olarak da taşınmış metalik yapı üzerindeki metrik ve özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu	: 20402
Anahtar Kelimeler	: Matalik oran, metalik yapı, tanjant demet, tam lift, metalik Riemann manifold, metalik yarı-Riemann manifold.
Sayfa Adedi	: 55
Danışman	: Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

PROLONGATIONS OF METALLIC STRUCTURES TO TANGENT BUNDLES
(M. Sc. Thesis)

Emre Ozan UZ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2019

ABSTRACT

In this thesis, a metallic structure on a differentiable manifold has been prolonged to the tangent bundle of this manifold through the complete lift. Then, some necessary tanms and teos about the integrability and parellelism of this metallic structure which was prolonged to the tangent bundles were given. Lastly, the metric, which was defined on the prolonged metallic structure, and its properties were investigated.

Science Code	: 20402
Key Words	: Metallic ratio, metallic structure, tangent bundle, complete lift, metallic Riemannian manifold, metallic semi-Riemannian manifold.
Page Number	: 55
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda bana bilgi ve deneyimi ile yardımcı olurken büyük sabır ve tahammül gösteren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN'a, bugünlere gelmemde büyük emeği olan saygıdeğer annem Bağdat UZ ve babam Hüseyin UZ'a ve varlıkları ile güç veren bütün dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
M	$m-$boyutlu bir C^∞ manifold
T_pM	M nin p noktasındaki tanjant uzay
$\chi(M)$	M üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanlarının modülü
$\Im_0^1(M)$	M üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanlarının modülü
$\Im_1^0(M)$	M üzerinde tanımlı C^∞ kovektör alanlarının modülü
$\Im_s^r(M)$	M üzerinde tanımlı (r, s) tipinden tensör alanlarının modülü
TM	M nin tanjant demeti
∇	M üzerinde lineer konneksiyon
$\overset{Sc}{\nabla}$	Schouten konneksiyonu
$\overset{V}{\nabla}$	Vranceanu konneksiyonu
$\sigma_{p,q}$	Metalik oran

1. GİRİŞ

Bir M differensiyellenebilir manifoldu verildiğinde, M üzerinde fonksiyon, vektör alanı, 1-form, konneksiyon, metrik ve tensör alanı gibi temel diferensiyellenebilir elemanların başka manifoldlara genişletilmesi, bu manifoldlar üzerindeki ilişkileri açıklamak adına önemlidir. M manifolduna diffeomorf olan manifoldlar hariç tutulduğunda M manifoldu ile en yakın ilişkisi olan manifold M nin tanjant demetinin total uzayı olan TM dir. Herhangi bir M manifoldu üzerindeki yapıların TM tanjant demete liftleri birçok yazar tarafından araştırılmış ve çalışılmıştır $[12, 16, 17, 22]$.

Crasmareanu ve Hretcanu (2008) "Golden Differential Geometry" adlı makalelerinde diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde $Q(X) = X^2 - X - I$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipinden bir Φ tensör alanı yardımıyla bir altın yapı tanımlamışlar ve bu yapının geometrisini incelemişlerdir. Özkan ve Peltek [13,14] ve Özkan ve Yılmaz [18] benzer bir düşünce ile diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde, sırasıyla, $Q(X) = X^2 - 2X - I$ yapı polinomu ile bir gümüş yapı ve $Q(X) = X^2 - X - 2I$ yapı polinomu ile bir bronz yapı tanımlamışlardır.

2013'de Hretcanu ve Crasmareanu [8], altın yapının bir genellemesi olan $Q(X) = X^2 - pX - qI$ yapı polinomuna sahip $(1, 1)$ tipinden bir J tensör alanı yardımıyla bir metalik yapı tanımlamışlardır. 2018'de Özkan ve Yılmaz [19], bu metalik yapının geometrisini çalışmışlardır.

Bu tez çalışmasında öncelikle yukarıda adı geçen yazarlar tarafından tanımlanan ve geometrik özellikleri çalışılan metalik yapı, sonraki bölümün daha iyi anlaşılabilmesi içn özetlenmiştir. Özgün olan bölümde ise önceki bölümlerde tanımları verilen tam lift yardımıyla M manifoldu üzerindeki metalik yapı TM tanjant demete taşınmıştır. Taşınmış metalik yapının integrallenebilirliği ve parelelliği incelenmiştir. Ek olarak TM de bu metalik yapı üzerindeki metrik ve özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin diğer kısımlarında faydalanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Diferensiyellenebilir Demet Yapıları

2.1.1. Tanım

E, M, F birer C^∞ manifold, $\beta : E \to M$ bir C^∞ dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere; eğer, $(\beta \circ \psi_\alpha)(p, y) = p$; $p \in U$, $y \in F$ olacak biçimde $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \beta^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorfizimlerin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sınıfı varsa (F e göre) β, lokal çarpım özelliğine sahiptir ve $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemide, β nın lokal ayrışmasıdır denir [7].

2.1.2. Tanım

$\beta : E \to M$ dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip bir C^∞ dönüşüm olsun. Böylece $\Phi = (E, \beta, M, F)$ dörtlüsüne differensiyellenebilir lif demeti adı verilir [7].

2.1.3. Tanım

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ bir C^∞-lif demeti olsun. O halde $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal ayrışmasına, Φ lif demetinin bir lokal koordinat gösterimi denir [7].

Bir $\Phi = (E, \beta, M, F)$ lif demetinde E ye Φ lif demetinin total uzayı, M ye baz (taban) uzayı, F ye lif modeli (veya standart lif) ve β ya fibrasyon veya projeksiyon adı verilir. Ayrıca $rank\Phi = boyF$ olarak tanımlanır [7].

(E, β, M, F) lif demeti bazen E total uzayı ile, bazen de $\beta : E \to M$ C^∞ dönüşümü ile gösterilir.

2.1.4. Tanım

$\beta : E \to M$ bir lif demeti olsun. $\forall p \in M$ için, $\beta^{-1}(p) = E_p = \{u \in E : \beta(u) = p\}$

kümesine p üzerinde bir lif denir [7].

Tüm E_p lerin ayrık birleşimi E total uzayını verir. Aynı zamanda bir $p \in M$ için, E_p lifi, E de kapalı imbedded alt manifolddur [20].

$boyE_p = boyE - boyM$ sayısına Φ nin lif boyutu denir [20].

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ bir lif demeti ve $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat temsilcisi olsun. $\forall p \in U_\alpha$ için,

$$\psi_{\alpha,p} : F \to E_p$$

dönüşümü, $\psi_{\alpha,p}(y) = \psi_\alpha(p, y)$; $y \in F$ şeklinde tanımlanırsa; ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,p}$ dönüşümleri de diffeomorfizmdir.

$U_{\alpha\theta} = U_\alpha \cap U_\theta \neq \emptyset$ olacak biçimde $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ailesinden (U_α, ψ_α) ve (U_θ, ψ_θ) ikilileri seçilsin.

$$\psi_\alpha, \psi_\theta : U_{\alpha\theta} \times F \to \beta^{-1}(U_{\alpha\theta})$$

şeklinde tanımlı ψ_α ve ψ_θ lar diffeomorfizm olduklarından

$$\psi_{\theta\alpha} = \psi_\theta^{-1} \circ \psi_\alpha : U_{\alpha\theta} \times F \to U_{\alpha\theta} \times F$$

dönüşümü,

$$\psi_{\theta\alpha}(p, y) = \left(p, \psi_{\theta,p}^{-1} \circ \psi_{\theta,p}(y)\right); \; p \in U_{\alpha\theta}, y \in F$$

şeklinde tanımlı bir diffeomorfizmdir. Böylece, $\forall p \in U_{\alpha\theta}$ için,

$$\psi_{\theta\alpha,p} = \psi_{\theta,p}^{-1} \circ \psi_{\alpha,p} : F \to F$$

dönüşümleri de diffeomorfizmdir [7].

2.1. Örnek

$\beta_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere, $\pi_M = (TM, \beta_M, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsü bir lif demetidir. Buna M manifoldunun tanjant demeti denir. Bir $p \in M$ için $\beta_M^{-1}(p)$ lifi $T_p(M)$ tanjant uzayıdır [3].

2.1.5. Tanım

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ herhangi bir lif demeti olsun. $\beta \circ \tau = I_M$ (özdeşlik) şeklinde tanımlı, $\tau : M \to E$ C^∞ dönüşümüne Φ lif demeti üzerinde bir çapraz kesit denir [7].

2.2. Örnek

$\pi_M = (TM, \beta_M, M, \mathbb{R}^m)$ lif demetini ele alalım. Bu durumda, $X \in \chi(M)$ vektör alanı

$X : M \to TM$, $\forall p \in M$ için $X(p) = X_p \in T_p(M)$

şeklinde tanımlı olup, β_M kanonik projeksiyonunda $\forall X_p \in T(M)$ için $\beta_M(X_p) = p$ olarak tanımlandığında,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\beta_M \circ X = I_M"'] & TM \arrow[d, "\beta_M"] \\ & M \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur. Böylece $X \in \chi(M)$ C^∞ vektör alanları π_M lif demeti üzerinde çapraz kesitlerdir [3].

2.1.6. Tanım

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ bir C^∞ lif demeti olsun. Eğer,

(i) $\forall p \in M$ için, $\beta^{-1}(p) = E_p$ ve F reel vektör uzayı;

(ii) $\forall p \in M$, $\psi_{\alpha,p} : F \to E_p$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak biçimde Φ nin $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat gösterimi var ise Φ ye bir vektör demeti denir [7].

2.1.7. Tanım

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ bir vektör demeti ve W, M de bir komşuluk olsun. Şayet,

(i) $x \in W$, $y \in F$ için $\beta \circ \psi_w(x, y) = x$ olacak biçimde $\psi_w : W \times F \to \beta^{-1}(W)$ dönüşümü diffeomorfizm,

(ii)$x \in W$ için $\psi_{w,x} : F \to F_x$ indirgenmiş dönüşümleri lineer izomorfizm

ise W ya Φ vektör demeti için bir aşikar komşuluk ve ψ_w ye de Φ için bir aşikar dönüşüm denir [3].

2.1.8. Tanım

$\Phi_1 = (E_1, \beta_1, M_1, F_1)$ ve $\Phi_2 = (E_2, \beta_2, M_2, F_2)$ iki vektör demeti olsun. Eğer aşağıda verilen aksiyomlar sağlanırsa Φ_1 demetine Φ_2 demetinin altvektör demeti denir.

(i)Φ_2, Φ_1 nin bir alt demetidir.

(ii) $\iota_E : E_2 \to E_1$ ve $\iota_M : M_2 \to M_1$ inclusion dönüşümleri olmak üzere;

$\iota_M \circ \beta_2 = \beta_1 \circ \iota_E$;

(iii)$\forall p \in M_1$ için,

$\iota_{E|E_{2p}} : E_{2p} \to E_{\iota|\iota_M(p)}$ kısıtlanmış dönüşümü lineerdir [3].

2.2. Tanjant Demet

M, m boyutlu bir C^{∞}- manifold ve $(W_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1\leq i\leq m}$ M üzerinde bir harita olsun. M nin tüm noktalarındaki tanjant uzayların ayrık birleşimi

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

ve TM üzerinde, $\beta_M : TM \to M$ dönüşümü, $\beta(v) = p$, $(v \in T_pM)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\bar{U}_\alpha = \beta^{-1}(W_\alpha)$ olmak üzere;

$$\bar{\varphi}_\alpha : \bar{W}_\alpha \to \varphi_\alpha(W_\alpha) \times \mathbb{R}^m$$

dönüşümü $v \in \bar{W}_\alpha$ için $\bar{\varphi}_\alpha(v) = (x^i \circ \beta_M(v), dx^i(v))_{1\leq i\leq m}$ şeklinde tanımlanırsa, $\bar{\varphi}_\alpha$ dönüşümü 1-1 ve örten olup, görüntü kümesi $\mathbb{R}^{2m}$ uzayının bir açık alt kümesidir. O halde $\left(\bar{W}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha\right)$ ikilisi TM üzerinde $2m-$boyutlu bir haritadır.

M de $A = \{(W_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ haritalarının ailesinden $W_\alpha \cap W_\theta \neq \emptyset$ olacak şekilde ki α, θ indis çifti için $(W_\alpha, \varphi_\alpha = (x^i))_{1\leq i\leq m}$ ve $(W_\theta, \varphi_\theta = (y^i))_{1\leq i\leq m}$ haritaları alındığında

$$\beta^{-1}(W_\alpha) \cap \beta^{-1}(W_\theta) \neq \emptyset$$

olacaktır.

$$\bar{\varphi}_{\alpha\theta=}\bar{\varphi}_\alpha \circ \bar{\varphi}_\theta^{-1} : \varphi_\theta(W_\alpha \cap W_\theta) \times \mathbb{R}^m \to \varphi_\alpha(W_\alpha \cap W_\theta) \times \mathbb{R}^m$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{\alpha\theta}(p) &= \bar{\varphi}_\alpha \circ \bar{\varphi}_\theta^{-1}\left(\varphi_\theta(p), z^1, ..., z^m\right) \\ &= \bar{\varphi}_\alpha(z_p) = \left(x^1 \circ \beta(z_p)\right), ..., x^m \circ \beta(z_p), dx^1(z_p), ..., dx^m(z_p))\end{aligned}$$

olur. Burada $x^i \circ \beta$ ve dx^i diferensiyellenebilir olduğundan $\bar{\varphi}_{\alpha\theta=}\bar{\varphi}_\alpha \circ \bar{\varphi}_\theta^{-1}$de diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $\bar{\varphi}_{\theta\alpha=}\bar{\varphi}_\theta \circ \bar{\varphi}_\alpha^{-1}$diferensiyellenebilir olduğu görülür. Böylece $A = \{(\beta^{-1}(W_\alpha), \bar{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ailesi diferensiyellenebilir bir atlastır. Bu yapıyla TM, $2m$ boyutlu C^∞ manifold olur [24].

2.2.1. Tanım

TM ye M nin tanjant manifoldu denir.

Lokal olarak, $TM = \{(p, z) \mid p \in M, z \in T_pM \cong \mathbb{R}^m\}$ gösterimi de kullanılır.

TM üzerinde bir lokal koordinat sistemi $x^i = x^i \circ \beta_m$ $y^i = dx^i$ olmak üzere

$\{x^1, ..., x^m, ..., y^m\}$

şeklinde ve kısa olarak $\varphi = (x^i, y^i)_{1 \leq i \leq m}$ veya $y = (y^i)_{1 \leq i \leq m}$ olmak üzere $\varphi = (x, y)$ yazılacaktır. $\bar{\varphi}_\alpha$ koordinat dönüşümü de $\bar{\varphi}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ şeklinde ifade edilecektir.

Böylece $(TM, \beta_M, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsünün bir vektör demeti olduğu kolayca gösterilebilir. Bu demete, M nin tanjant demeti, sürekli, örten ve C^∞ dönüşüm olan β_M ye de doğal (kanonik) projeksiyon denir [7].

2.2.2. Tanım

M, C^∞ manifoldu baz alınarak oluşturulan $\pi_M = (TM, \beta_M, M, \mathbb{R}^n)$ vektör demetine, M manifoldunun tanjant demeti denir [3].

M, n boyutlu bir manifold ve T_p^*M bir $p \in M$ noktasında kotanjant uzay olsun.

$T^*M = \underset{p \in M}{\cup} T^*M$ kümesine M manifoldu üzerinde bir kotanjant demet denir.

$\beta_M^* : T^*M \to M$ bir projeksiyon dönüşümü olmak üzere $(T^*M, \beta_M^*, M, \mathbb{R}^m)$ dörtlüsü bir vektör demetidir [21].

2.2.3. Tanım

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ lif demeti olsun. $\forall z \in E$ için

$$V_zE = \text{çek}(\ \beta_* \mid_z) = \{A_z \in T_zE : \beta_* \mid_z (A_z) = 0\}$$

kümesi, T_zE tanjant uzayının bir alt uzayıdır. V_zE uzayına E nin z noktasında vertical uzay ve bu uzayın her bir elemanına da bir vertical tanjant vektör denir [7].

$z \in E$ ve $\beta(z) = p$ olmak üzere $V_zE = T_z(F_p)$ dir [7].

$\chi(E)$, E üzerinde vektör alanlarının modülü ve $A \in \chi(E)$ olsun. $\forall z \in E$ için $A_z \in V_zE$ ise A ya vertical vektör alanı denir ve $A \in \chi^v(E)$ şeklinde gösterilir [7].

$\Phi = (E, \beta, M, F)$ lif demeti olsun. Bir

$\beta_{TE} : TE \to E$ dönüşümü $\forall z \in E$ için $\beta_{TE}^{-1}(z) = T_zE$ şeklinde tanımlansın. Böylece

$$TE = \bigcup_{z \in E} T_zE$$

olmak üzere $\Phi_{TE} = (TE, \beta_{TE}, E, \mathbb{R}^{m+n})$ dörtlüsü bir vektör demeti olup, bu E manifoldunun tanjant demetidir [7].

2.2.4. Tanım

k $(k = m + n)$ boyutlu bir M manifoldu üzerinde $m-$boyutlu olacak biçimde bir differensiyellenebilir dağılım, TM tanjant demetinin rankı m olan bir D alt vektör demetidir [9].

O halde M manifoldu üzerinde $m-$boyutlu differensiyellenebilen bir dağılım, $\forall x \in M$ ye karşılık $m-$boyutlu bir $\triangle_x \subset T_xM$ alt vektör uzayını karşılık getirir.

$$\begin{array}{cccc} \triangle & : & M & \to & \underset{x \in M}{\cup} T_xM \\ & & x & \to & \triangle_x \subset T_xM \end{array}$$

Ek olarak, $\forall x \in M$ nin bir W komşuluğunda lineer bağımsız $X_1, ..., X_m$ vektör alanı vardır ve W komşuluğundaki $\forall p \in W$ için $\{X_1(p), ..., X_m(p)\}$ kümesi $\triangle_p$ alt vektör uzayının bir bazıdır [9].

M manifoldu üzerinde bir dağılım D ve X ise $W \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Eğer, $\forall q \in W$ için $X_q \in \triangle_q$ ise X vektör alanı D dağılımına aittir denir ve $X \in D$ ile gösterilir [1].

2.2.5. Tanım

M diferensiyellenebilir manifold olsun. K ve L de M manifoldu üzerinde iki tümleyen dağılım, yani $\forall x \in M$ için $T_xM = K_x \oplus L_x$ yada $TM = K \oplus L$ dir [15].

k ve l sırasıyla K ve L dağılımlarına karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere k ve l $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır. Ayrıca,

$$k^2 = k, \quad l^2 = l, \quad kl = lk = 0, \quad k + l = I_{TM}$$

özellikleri vardır [15].

2.3. Uyarlanmış Konneksiyonlar

M üzerinde $(m+n)$ boyutlu bir $m-$dağılım K olsun. M manifoldu üzerindeki bir lineer konneksiyon ∇ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$, $Z \in K$ için $\nabla_X Z \in K$ ise ∇ konneksiyonuna K ya uyarlanmış denir [1].

M manifoldu üzerinde K dağılımının tümleyen bir $n-$dağılımı L olsun. Ozaman $TM = K \oplus L$ dir. k ve l sırasıyla K ve L dağılımlarına karşılık gelen projeksiyonlar olsun. Böylece $k - l = P$ şeklinde bir hemen hemen çarpım yapısı oluşturulabilir.

2.3.1. Tanım

∇, hemen hemen çarpım manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ hem K ya hemde L ye göre uyarlanmış, yani, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\nabla_X kY \in K$ ve $\nabla_X lY \in L$ ise ∇ ya uyarlanmış lineer konneksiyon denir [1].

İlk kez Schouten Van - Kampen ve Vranceanu tarafından tanıtılan ve kendi isimleriyle bilinen hemen hemen çarpım manifoldları üzerinde iki uyarlanmış lineer konneksiyon vardır.

2.3.2. Tanım

M hemen hemen bir çarpım manifoldu ve ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overset{Sc}{\nabla}_X Y = k(\nabla_X kY) + l(\nabla_X lY)$$

şeklinde tanımlı $\overset{Sc}{\nabla}$ ye Schouten konneksiyonu ve

$$\overset{V}{\nabla}_X Y = k(\nabla_{kX} kY) + l(\nabla_{lX} lY) + k[lX, kY] + l[kX, lY]$$

şeklinde tanımlı $\overset{V}{\nabla}$ ye Vranceanu konneksiyonu denir [1].

M manifoldu üzerinde $k - l = P$ olacak şekildeki hemen hemen çarpım yapısı P olsun. Eğer ∇ lineer konneksiyonunun kovaryant türevi sıfıra eşit, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X P) Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y = 0$$

ise P hemen hemen çarpım yapısına ∇ lineer konneksiyonuna göre paraleldir denir [1].

2.3.3. Lemma

(M, g) bir Riemann manifoldu ve P, M üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı olsun. P, $\overset{g}{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel yani $\overset{g}{\nabla} P = 0$ ise Riemann hemen hemen çarpım yapı bir lokal çarpım yapıdır $[4, 24]$.

2.3.4. Lemma

M hemen hemen çarpım manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyonu simetrik ise P nin Nijenhuis tensörü

$$N_p(X,Y) = (\nabla_{PX}P)\,Y - (\nabla_{PY}P)\,X - P\,(\nabla_X P)\,Y + P\,(\nabla_Y P)\,X$$

şeklindedir [4].

2.4. Tanjant Demete Liftler

Bu kısımda Yano ve Ishihara (1973) tarafından tanımlanan TM ye vertical ve tam liftlerin özellikleri özet olarak verilecektir [21].

2.4.1. TM ye vertical liftler

2.4.1. Tanım

M bir C^∞ manifold ve $g : M \to \mathbb{R}$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ TM \arrow[u, "\beta_M"] \arrow[ur, "g^V"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde,

$$g^V = g \circ \beta_M \tag{2.1}$$

eşitliğiyle verilen g^V C^∞ dönüşümüne, g nin TM ye veritcal lifti denir.

$\forall z \in TM$ için eğer $z \in T_pM$ ise

$$g^V(z) = g(\beta_M(z)) = g(p);$$

eşitliği yazılabilir. Buna göre $rangeg^V = rangeg$ dir. $domg = W$ ise,

$$domg^V = (\beta_M)^{-1}(W) \subset TM$$

açık altkümesidir.

$\forall g, h \in C^{\infty}(M)$ için,

$(gh)^V = g^V h^V$

dir.

Fonksiyonlar için vertical lift operatörü

$$\begin{array}{ccccc} v & : & C^{\infty}(M) & \rightarrow & C^{\infty}(TM) \\ & & g & \rightarrow & v(g) \qquad v(g) = g^V \end{array}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Burada v, reel katsayılara göre tanım ve değer kümesi arasında bir içine izomorfizmdir.

M bir C^{∞} manifold M üzerinde lokal koordinat fonksiyonları $(x^i)_{1 \leq i \leq m}$ ve TM üzerine indirgenen lokal koordinat fonksiyonları da $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq m}$ olsun. M üzerinde 1-formların uzayı M üzerinde bir dönüşüm

$$\begin{array}{ccccc} \iota & : & \Im_1^0(M) & \rightarrow & \Im_0^0(TM) \\ & & w = w_i dx^i & \rightarrow & \iota(w) = (w_i)^V y^i \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

2.4.2. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere; $\forall w \in \Im_1^0(M)$ için,

$$X^V(\iota w) = (w(X))^V \tag{2.2}$$

eşitliğiyle tanımlı $X^V \in \chi(TM)$ vektör alanına X vektör alanının TM ye vertical lifti denir.

2.4.3. Teorem

$X \in \chi(M)$ vektör alanlarının bileşenleri X^r olmak üzere;

$$X^V = (X^r)^V \frac{\partial}{\partial y^r}$$

dir.

2.4.4. Lemma

$\forall X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $\forall g \in C^\infty(M)$ için

$$(X+Y)^V = X^V + Y^V, \quad (gX)^V = g^V X^V, \quad \left[X^V, Y^V\right] = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

dir.

2.4.5. Tanım

$\bar{X} \in \chi(TM)$ vektör alanı ve $\forall g \in C^\infty(M)$ için eğer, $\bar{X}\left[g^V\right] = 0$ ise $\bar{X}$ ye TM de bir vertical vektör alanı denir.

2.4.6. Teorem

$\bar{X} \in \chi(TM)$ nin bir vertical vektör alanı olabilmesi için gerek ve yeter şart;

$$\bar{X} = \left(\bar{X}^r\right) \frac{\partial}{\partial y^r}$$

olmasıdır.

2.4.7. Tanım

w, M üzerinde tanımlı bir 1-form olsun. Böylece,

$$w^V(X^C) = (w(X))^V, \qquad X \in \chi(M) \text{ için} \tag{2.3}$$

eşitliğiyle tanımlı $w^V \in \chi^*(M)$ 1-formuna, w 1-formunun TM ye vertical lifti denir.

2.4.8. Teorem

w^i ler $w \in \chi^*(M)$ 1-formunun bileşenleri olmak üzere

$$w^V : ((w_i), 0), 1 \leq i \leq m \tag{2.4}$$

dir.

2.4.9. Lemma

$\forall w, \theta \in \Im_1^0(M)$ ve $\forall g \in C^\infty(M)$ için

$$(w+\theta)^V = w^V + \theta^V, \quad (gw)^V = g^V w^V, \quad (dg)^V = d\left(g^V\right)$$

dir.

2.4.10. Tanım

TM üzerinde tanımlı bir 1-form $\bar{w}$ olsun. Böylece $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı için,

$$\bar{w}\left(X^V\right) = 0$$

ise, $\bar{w}$ ye TM de bir vertical 1-form denir.

2.4.11. Teorem

$\bar{w} \in \chi^*(TM)$ nin bir vertical 1-form olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\bar{w} : ((\bar{w}_i), 0)$$

şeklinde olmasıdır.

Sonuç

$w \in \chi^*(M)$ 1-formunun TM ye vertical lifti olan w^V 1-formu TM de vertical 1-formdur.

2.4.12. Tanım

Tensör alanların vertical liftlerini şu koşul altında yazarız. W, S ve $Q \in \Im(M)$ için,

$$(W \otimes S)^V = W^V \otimes S^V, \quad (W+Q)^V = W^V + Q^V \tag{2.5}$$

dır.

$A \in \Im_1^1(M)$ olsun. A nın lokal bileşenleri

$$A = A_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i$$

olmak üzere, buradan

$$A^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_i^h & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

biçiminde matris gösterimine sahiptir.

$H \in \Im_2^0(M)$ tensör alanının vertical lifti

$$H^V : \begin{pmatrix} H_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

şeklinde matris gösterimine sahiptir.

2.4.13. Lemma

M, C^∞ manifold olsun. $H \in \Im_2^0(M)$ ve $\forall X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$H^V(X^V, Y^V) = 0$

dır.

2.4.2. TM ye tam liftler

2.4.14. Tanım

g, M de bir fonksiyon olmak üzere

$$g^C = \imath(dg) = \left(\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)^V y^i \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı g^C fonksiyonuna g fonksiyonunun TM tanjant demetine tam lifti denir.

Bir g fonksiyonunun tam lifti g^C, TM de indirgenmiş koordinatlara göre

$$g^C = Y^i \partial_i g = \partial g \tag{2.9}$$

lokal ifadesine sahiptir. Burada ∂g, $Y^i \partial_i g$ i gösterir.

$\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)$ ile $\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)^V$ fonksiyonlarının görüntü kümeleri eşit olduğundan Eş. 2.8 eşitliği genellikle

$$g^C = \frac{\partial g}{\partial x^i} y^i = \partial g$$

şeklinde yazılır.

2.4.15. Lemma

M deki her g fonksiyonu için $\widetilde{X} g^C = \widetilde{Y} g^C$ olacak biçimdeki $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ TM deki vektör alanları olsun. O halde $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$ dir.

2.4.16. Teorem

$\forall g, h \in C^{\infty}(M)$ ve $X \in \chi(M)$ için,

$$(gh)^C = g^C h^V + g^V h^C, \quad (Xg)^V = X^V g^C \tag{2.10}$$

dir.

2.4.17. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X olsun. $\forall g \in C^{\infty}(M)$ için,

$$X^C(g^C) = (X(g))^C \tag{2.11}$$

eşitliğiyle tanımlanan $X^C \in \chi(TM)$ vektör alanına, X vektör alanının TM ye tam lifti denir.

Buradan,

$$X^C : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

dır.

2.4.18. Teorem

$X \in \chi(M)$ vektör alanlarının bileşenleri X^r olmak üzere;

$$X^C = X^r \frac{\partial}{\partial X^r} + (X^r)^C \frac{\partial}{\partial y^r} \tag{2.13}$$

dır.

Eş. 2.11 kullanılarak aşağıdaki özellikler verilebilir.

2.4.19. Lemma

$\forall X,\, Y \in \Im_0^1(M),\, f \in \Im_0^0(M)$ ve $w \in \Im_1^0(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
&(X+Y)^C = X^C + Y^C, \quad (fX)^C = f^C X^V + f^V X^C,\\
&X^C f^V = (Xf)^V, \quad w^V(X^C) = (w(X))^V,\\
&X^V f^V = 0, \quad X^V f^C = (Xf)^V, \quad X^C f^V = (Xf)^V, \quad X^C f^C = (Xf)^C,\\
&\left[X^V, Y^V\right] = 0, \quad \left[X^V, Y^C\right] = [X,Y]^V, \quad \left[X^C, Y^C\right] = [X,Y]^C
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

dır.

2.4.20. Tanım

M üzerinde tanımlı bir 1-form w olsun. Bu durumda,

$$w^C\left(X^C\right) = \left(w\left(X\right)\right)^C, \quad X \in \chi\left(M\right) \tag{2.15}$$

eşitliğiyle tanımlı $w^C \in \chi^*\left(TM\right)$ 1-formuna, w 1-formunun TM ye tam lifti denir.

2.4.21. Teorem

$w \in \chi^*\left(M\right)$ 1-formunun bileşenleri w_i ler olmak üzere;

$$w^C : (\partial w_i, w_i) \tag{2.16}$$

şeklindedir.

Eş. 2.16 kullanılarak aşağıdaki özellikler verilebilir.

2.4.22. Lemma

$\forall X \in \Im_0^1(M)$, $f \in \Im_0^0(M)$ ve $w, \theta \in \Im_1^0(M)$ için,

$$(w+\theta)^C = w^C + \theta^C,\ (fw)^C = f^C w^V + f^V w^C \tag{2.17}$$

$$w^C(X)^V = (w(X))^V,\ w^C\left(X^C\right) = (w(X))^C$$

$$w^V(X^V) = 0\ ,\ w^V(X^C) = (w(X))^V,\ w^C(X^V) = (w(X))^V,\ w^C(X^C) = (w(X))^C$$

dır.

Eş. 2.16 denklemine göre her açık $\pi^{-1}U$ kümesi için

$$\left(dx^h\right)^C = dy^h \tag{2.18}$$

dir.

Burada $\left\{d\overline{x}^h, d\overline{y}^h\right\}$, $\chi(TM)$ nin $\left\{\frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial y^h}\right\}$ bazına dual olup, $\forall\overline{X} \in \chi(TM)$ için $d\overline{x}^h\left(\overline{X}\right) = \overline{X}\left(x^h\right)$ ve $d\overline{y}^h\left(\overline{X}\right) = \overline{X}\left(y^h\right)$; $(1 \leq h \leq m)$ şeklinde tanımlıdırlar.

M ve TM nin tensör cebirleri sırasıyla $\Im(M)$ ve $\Im(TM)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccccc} C & : & \Im(M) & \rightarrow & \Im(TM) \\ & & p & \rightarrow & p^C \end{array}$$

dönüşümü, $\forall P, \theta \in \Im(TM)$ için,

(i) $(P+\theta)^C = P^C + \theta^C$

(ii) $(P \otimes \theta)^C = P^C \otimes \theta^V + P^V \otimes \theta^C$

koşulları altında sabit katsayılara göre bir içine lineer izomorfizmdir.

Tanımlanan C izomorfizmi altında elde edilen P^C tensör alanına P nin TM ye tam lifti denir.

Örnek

$F \in \Im_1^1(M)$ olsun. F^C nin bileşenlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
F &= \left(F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i\right)^C \\
&= \left(F_i^h\right)^C \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i\right)^V + \left(F_i^h\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i\right)^C \\
&= \left(F_i^h\right)^C \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)^V \otimes \left(dx^i\right)^V + \left(F_i^h\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)^V \otimes \left(dx^i\right)^C + \left(F_i^h\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)^C \otimes \left(dx^i\right)^V \\
&= \left(F_i^h\right)^V \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + \left(F_i^h\right)^C \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i + \left(F_i^h\right)^V \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^i
\end{aligned}$$

Buradan F^C nin matris gösterimi

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

şeklindedir.

$F, G \in \Im_1^1(M)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$(FG)^C = F^C G^C \tag{2.20}$$

Bu denklemde G yerine F yazılarak,

$$\left(F^2\right)^C = (F^C)^2 \tag{2.21}$$

elde edilir. Eş. 2.20 denkleminde G yerine F^2 yazıldığında

$$\begin{aligned}
&(FF^2)^C = F^C(F^2)^C \\
\Rightarrow &(F^3)^C = (F^C)^3
\end{aligned} \tag{2.22}$$

olur. Bu işleme aynı şekilde devam edilirse,

$$(F^k)^C = (F^C)^k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.23}$$

elde edilir.

2.4.23. Lemma

$\forall X \in \Im_0^1(M)$, $F \in \Im_1^1(M)$, $G \in \Im_2^0(M)$ için,

$$F^C X^V = (FX)^V, \; F^C X^C = (FX)^C, \; F^V X^V = 0, \; F^V X^C = (FX)^V \tag{2.24}$$

$$G^C(X^V, Y^V) = 0, \; G^C(X^V, Y^C) = (G(X,Y))^V,$$

$$G^C(X^C, Y^V) = (G(X,Y))^V, \; G^C(X^C, Y^C) = (G(X,Y))^C$$

dır.

2.4.24. Tanım

Bir C^∞ manifold M ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun. TM üzerinde $\forall$, $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \tag{2.25}$$

eşitliğini sağlayan bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır ve bu lineer konneksiyona ∇ nın TM ye tam lifti denir.

3. METALİK DİFERENSİYEL GEOMETRİ

Bu bölümde tezin alt yapısını oluşturan Yılmaz'ın [25] "Metalik diferensiyel geometri" adlı Yüksek Lisans Tezi, Özkan ve Yılmaz'ın [19] "Metallic structures on differentiable manifolds" ve Hretcanu ve Crasmareanu'nun [8] "Metallic structures on Riemannian manifolds" adlı makalelerinin 4. Bölüm için gerekli olan kısımları, bu bölümün daha iyi anlaşılabilmesi adına kısaca özetlenecektir.

3.1. Manifoldlar Üzerinde Metalik Yapılar

3.1.1. Tanım

M bir C^∞ manifold olsun. $Q(x) = x^2$ yapı polinomuna sahip M üzerinde $(1,1)$ tipindeki T tensör alanına hemen hemen tanjant yapı denir. Yani $T^2 = 0$ dir [4].

3.1.2. Tanım

M bir C^∞ manifold olsun. $Q(x) = x^2 - 1$ yapı polinomuna sahip M üzerinde $(1,1)$ tipindeki P tensör alanına hemen hemen çarpım yapı denir [4]. Yani $P^2 = I$ dır.

3.1.3. Tanım

M bir C^∞ manifold olsun. $Q(x) = x^2 + I$ yapı polinomuna sahip M üzerinde $(1,1)$ tipindeki C tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir [4]. Yani $C^2 = -I$ dır.

Eğer bir manifold üzerinde hemen hemen kompleks yapı mevcutsa, bu manifoldun boyutu çifttir.

3.1.4. Tanım

p ve q iki pozitif tamsayı ve I, M manifoldu üzerinde vektör alanlarının $\chi(M)$ Lie cebiri üzerinde özdeşlik dönüşümü olsun.

$$J^2 = pJ + qI \tag{3.1}$$

denklemini sağlayan M üzerinde $(1,1)$ tipinden J tensör alanı ile tanımlanan M üzerindeki bir polinomial yapıya metalik yapı denir [8].

Eş. 3.1 de özel olarak $p = q = 1$, $p = 2$, $q = 1$ ve $p = 3$, $q = 1$ alınırsa M manifoldu üzerinde sırasıyla, altın yapı [4], gümüş yapı [10,13] ve bronz yapı [18] elde edilir.

3.1.5. Lemma

M bir manifold ve J, M üzerinde bir metalik yapı olmak üzere;

i) J nin öz değerleri, metalik oran olan $\sigma_{p,q} = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}$, ve $p - \sigma_{p,q}$ dır [8].

ii) J, $\forall x \in M$ için M manifoldunun T_xM tanjant uzayı üzerinde bir izomorfizmdir [8].

iii) J nin tersi mevcuttur ve bu ters $J^{-1} = \hat{J}$ olmak üzere

$$q\hat{J}^2 + p\hat{J} - I = 0 \tag{3.2}$$

denklemini sağlar [8].

T bir hemen hemen tanjant yapı ise $(-T)$ de bir hemen hemen tanjant yapıdır. P bir hemen hemen çarpım yapı ise $(-P)$ de bir hemen hemen çarpım yapıdır. C bir hemen hemen kompleks yapı ise $(-C)$ de bir hemen hemen kompleks yapıdır [4].

Benzer durum metalik yapılar içinde mevcuttur.

3.1.6. Lemma

J bir metalik yapı ise

$$\bar{J} = pI - J \tag{3.3}$$

da bir metalik yapıdır [8].

3.1.7. Lemma

M manifoldu üzerinde bir P hemen hemen çarpım yapı, M üzerinde

$$J_1 = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P \tag{3.4}$$

$$J_2 = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P \tag{3.5}$$

gibi iki farklı metalik yapı indirger. Tersine M manifoldu üzerindeki her J metalik yapı bu manifold üzerinde

$$P = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right) \tag{3.6}$$

iki farklı hemen hemen çarpım yapı üretir [8].

3.1.8. Tanım

i) T, M manifoldu üzerinde bir hemen hemen tanjant yapı olsun. O zaman

$$J_t = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)T \tag{3.7}$$

ifadesi (M, T) hemen hemen tanjant manifoldu üzerinde bir tanjant metalik yapıdır.

J_t tanjant metalik yapısı

$$J_t^2 - pJ_t + \frac{p^2}{4}I = 0$$

denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklemi düşünürsek, $x^2 - px + \frac{p^2}{4} = 0$ dır. Bu denklemin kökü $\sigma_t = \frac{p}{2}$ sayısı tanjant metalik oran olarak adlandırılır [19, 25].
ii) (M, C) bir hemen hemen kompleks manifold olsun.

$$J_c = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)C \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanan J_c tensör alanına (M, C) hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde kompleks metalik yapı denir. J_c kompleks yapısı

$$J_c^2 - pJ_c + \frac{p^2 + 2q}{2}I = 0$$

denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklemi düşünürsek, $x^2 - px + \frac{p^2+2q}{2} = 0$ dır. Bu denklemin kökleri $x_1 = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$, $x_2 = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$ bulunur. Denklemin pozitif kökü olan $J_c = \frac{p}{2}I + \frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}i$ kompleks sayısına kompleks metalik oran denir [19, 25].

3.2. Metalik Yapıların İntegrallenebilirliği ve Paralelliği

$\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için, J metalik yapısının Nijenhuis tensörü,

$$N_J(X, Y) = J^2[X, Y] + [J(X), J(Y)] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)] \tag{3.9}$$

dir. Eş. 3.4, Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 eşitliklerinden, P hemen hemen çarpım yapısının Nijenhuis tensörü N_P olmak üzere için, $\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$N_P(X, Y) = \frac{4}{(2\sigma_{p,q} - p)^2}N_J(X, Y) \tag{3.10}$$

eşitliği vardır [19, 25].

M bir manifold ve R, S de M üzerinde tamamlayıcı dağılımlar olsun. Bu durumda

$TM = R \oplus S$ eşitliği vardır. R ve S dağılımlarına karşılık gelen r ve s projeksiyonları,

$$r + s = I_{TM},\ r^2 = r,\ s^2 = s,\ rs = sr = 0 \tag{3.11}$$

eşitliklerini sağlar. $r - s = P$ olmak üzere,

$$r + s = I_{TM}, \quad r - s = P$$

eşitliklerinden

$$r = \frac{1}{2}(I_{TM} + P), \quad s = \frac{1}{2}(I_{TM} - P) \tag{3.12}$$

eşitlikleri bulunur. Eş. 3.6 eşitliği Eş. 3.12 eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$r = \frac{1}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p - \sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p}I, \quad s = -\frac{1}{2\sigma_{p,q} - p}J + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p}I \tag{3.13}$$

elde edilir [8].

r ve s projeksiyonları için

$$Jr = rJ = \sigma_{p,q}r \tag{3.14}$$

bulunur [8]. Benzer şekilde

$$Js = sJ = (p - \sigma_{p,q})\, s \tag{3.15}$$

bulunur [8]. Eş. 3.14 ve Eş. 3.15 den

$$s[rX, rY] = \frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} sN_j(rX, rY) \tag{3.16}$$

$$r\,[sX, sY] = \frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} rN_j(sX, sY) \tag{3.17}$$

elde edilir [19, 25].

3.2.1. Lemma

i) Eğer $N_J = 0$ ise J metalik yapısı integrallenebilirdir [23]. Eş. 3.10 dan dolayı, J metalik yapısı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart P hemen hemen çarpım yapısı integrallenebilirdir [19, 25].

ii) $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için, $s[rX, rY] = 0$ ise R dağılımı M manifoldu üzerinde integrallenebilirdir. Benzer şekilde, $r[sX, sY] = 0$ ise S dağılımı M manifoldu üzerinde integrallenebilirdir [23].

3.2.2. Lemma

i) R dağılımı integrallenebilirdir $\Longleftrightarrow$ $sN_J\,(rX, rY) = 0$ [19, 25],

ii) S dağılımı integrallenebilirdir $\Longleftrightarrow$ $rN_J\,(sX, sY) = 0$ [19, 25],

iii) J integrallenebilir ise hem R hem de S integrallenebilirdir [19, 25].

3.2.3. Lemma

r ve s projeksiyonları M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir. Ayrıca J metalik yapısıda Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir [19, 25].

3.2.4. Lemma

R ve S dağılımları M manifoldu üzerindeki her ∇ lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre paraleldir [19, 25].

3.3. Metalik Riemann Metrikler

3.3.1. Tanım

P, M manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı olsun. $\forall\ X, Y \in \chi\,(M)$ için

$$g(P(X), P(Y)) = g(X, Y)$$

veya buna denk olarak (P, bir g-simetrik endomorfizm)

$$g(P(X), Y) = g(X, P(Y))$$

olacak şekilde M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği varsa (g, P) ikilisine Riemann hemen hemen çarpım yapı denir [4, 23].

3.3.2. Tanım

M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği, $\forall\ X, Y \in \chi\,(M)$ için

$$g(J(X), Y) = g(X, J(Y))$$

eşitliğini sağlıyorsa (g, J) ikilisine metalik Riemann yapı ve (M, g, J) üçlüsüne de metalik Riemann manifold denir [8].

3.3.3. Lemma

Metalik Riemann manifoldu üzerinde

i) r, s projeksiyonları g-simetriktir. Yani,

$$g(r(X), Y) = g(X, r(Y)), \quad g(s(X), Y) = g(X, s(Y))$$

dir [19, 25].

ii) R ve S dağılımları g-ortogonaldir. Yani,

$$g(r(X), s(Y)) = 0$$

dir [19, 25].

iii) Metalik yapı, N_j-simetriktir. Yani,

$$N_j(J(X), Y) = N_j(X, J(Y))$$

dir [19, 25].

3.3.4. Lemma

M bir lokal çarpım metalik Riemann manifold olsun. Bu manifold üzerindeki J metalik yapısı integrallenebilirdir [19, 25].

4. METALİK YAPININ TANJANT DEMETE TAŞINMASI

Bu bölümde, M manifoldu üzerindeki J metalik yapısı tam lift yardımıyla TM tanjant demete taşınmıştır. Daha sonra TM tanjant demet üzerindeki metalik yapının integrallenebilirliği ve paralelliği incelenmiştir. Son olarak da tanjant demet üzerinde metalik semi-Riemann manifold çalışılmıştır.

4.1. Metalik Yapının Tanjant Demete Tam Lifti

4.1.1. Teorem

$J \in \Im_1^1(M)$ olsun. J nin J^C tam lifti TM de metalik yapıdır gerek ve yeter şart J metalik yapıdır.

İspat

$J^2 = pJ + qI$ eşitliğinin her iki tarafının tam lifti alınırsa Eş. 2.23 den ve $I^C = I$ olmasından

$$\begin{aligned} &(J^2)^C = (pJ + qI)^C \\ \Rightarrow &(J^C)^2 = pJ^C + qI \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir.

4.1.2. Lemma

i) J, M manifoldu üzerinde bir metalik yapı olsun. TM de J^C metalik yapısının öz değerleri $\sigma_{p,q}$ ve $p - \sigma_{p,q}$ dır.

ii) J, M manifoldu üzerinde bir metalik yapı olsun. $\forall\, q \in TM$ için TM manifoldunun tanjant uzayı $T_q(TM)$ üzerinde izomorfizmdir.

iii) J^C nin tersi vardır. $\hat{J} = (J^C)^{-1}$ ise $p\hat{J} + q\hat{J}^2 - I = 0$ denklemini sağlar.

İspat

J, M üzerinde bir metalik yapı olsun. Bu durumda J^C de TM de bir metalik yapıdır.

i)$J^C : \chi(TM) \overset{Lineer}{\rightarrow} \chi(TM)$, $\chi(TM)$ üzerindeki J^C nin öz değeri λ ise $\forall\ X \in \chi(M)$ olmak üzere $X^C \in \chi(TM)$ için $J^C X^C = \lambda X^C$ dir. J^C metalik yapı olduğu için $(J^C)^2 = pJ^C + qI$ eşitliğini sağlar

$$
\begin{aligned}
& (J^C)^2 = pJ^C + qI \\
\Rightarrow\ & (J^C)^2 X^C = pJ^C X^C + qIX^C \\
\Rightarrow\ & J^C(J^C X^C) = pJ^C X^C + qX^C \\
\Rightarrow\ & J^C(\lambda X^C) = p\lambda X^C + qX^C \\
\Rightarrow\ & \lambda(J^C X^C) = \lambda p X^C + qX^C \\
\Rightarrow\ & \lambda(\lambda X^C) = \lambda p X^C + qX^C \\
\Rightarrow\ & \lambda^2 X^C = (\lambda p + q) X^C
\end{aligned}
$$

bu eşitlik $\forall\ X^C \in \chi(TM)$ için doğru olduğundan $\lambda^2 = \lambda p + q$ eşitliğini elde ederiz. Bu denklemin kökleri de metal oran olan

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \sigma_{p,q} \qquad \lambda_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = p - \sigma_{p,q}$$

dır.

ii) J, M manifoldu üzerinde bir metalik yapı olsun. Bu durumda $J^C \in \Im_1^1(TM)$ olduğundan J^C lineerdir. O halde J^C nin lineer izomorfizm olabilmesi için J^C nin birebir ve örten olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer bir lineer dönüşümün çekirdeği $\{0\}$ ise bu lineer dönüşüm $1-1$ dir.

çek $J^C = \left\{X^C \in \chi(TM) : J^C(X^C) = 0\right\}$ ve $X^C \in$ çek J^C olsun.

$$\left(J^C\right)^2 = pJ^C + qI$$
$$\Rightarrow J^C\left(J^C\left(X^C\right)\right) = pJ^C X^C + qIX^C$$
$$\Rightarrow J^C(0) = p0 + qX^C \quad (J^C, \text{ lineer olduğundan } J^C(X^C) = 0)$$
$$\Rightarrow 0 = 0 + qX^C$$
$$\Rightarrow X^C = 0$$

çek $J^C = 0$. Yani J^C birebirdir.

Örtenliğine bakalım;

$boy\chi\,(TM) = rankJ^C + boy$(çek J^C), çek $J^C = \{0\}$ olduğundan boy(çek J^C) $= 0$ dır. O halde,

$boy\chi\,(TM) = boyJ^C(\chi\,(TM))$ olup $\chi\,(TM) = J^C(\chi\,(TM))$ dir.

iii) J^C nin tersi vardır. $\hat{J} = \left(J^C\right)^{-1}$ ise $p\hat{J} + q\left(\hat{J}\right)^2 - I = 0$ denklemini sağlar.

J^C izomorfizm olduğundan birebir ve örtendir. Dolayısıyla J^C nin tersi mevcuttur.

$$\left(J^C\right)^2 = pJ^C + qI \qquad \text{(her iki tarafa } (J^C)^{-1} \text{ uygulanırsa)}$$
$$\Rightarrow \left(J^C\right)^2 (J^C)^{-1} = pJ^C(J^C)^{-1} + qI(J^C)^{-1}$$
$$\Rightarrow J^C J^C\left((J^C)^{-1}\right) = pI + q(J^C)^{-1}$$
$$\Rightarrow J^C = p + q(J^C)^{-1} \qquad \text{(her iki tarafa } (J^C)^{-1} \text{ uygulanırsa)}$$
$$\Rightarrow I = p(J^C)^{-1} + q(J^C)^{-2}$$
$$\Rightarrow I = p\hat{J} + q\hat{J}^2$$
$$\Rightarrow p\hat{J} + q\hat{J}^2 - I = 0$$

elde edilir.

4.1.3. Lemma

a) T, M manifoldu üzerinde hemen hemen tanjant yapı ise T^C ve $-T^C$ da TM de hemen hemen tanjant yapıdır [12, 21].

b) P, M manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı ise P^C ve $-P^C$ de TM de hemen hemen çarpım yapıdır [12, 21].

c) C, M manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı ise J^C ve $-J^C$ de TM de hemen hemen kompleks yapıdır [12, 21].

Benzer durum metalik yapılar için de vardır.

4.1.4. Lemma

J, M manifoldu üzerinde metalik yapı olsun. J^C metalik yapıdır ve $\bar{J} = pI - J^C$ de TM de metalik yapıdır.

İspat

J^C bir metalik yapı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left(\bar{J}\right)^2 &= \left(pI - J^C\right)^2 = \left(pI - J^C\right) \circ \left(pI - J^C\right) \\
&= p^2 I^2 - 2pJ^C I + (J^C)^2 \\
&= p^2 I - 2pJ^C I + pJ^C + qI \\
&= p^2 I - pJ^C + +qI \\
&= p(pI - J^C) + qI
\end{aligned}$$

Buradan $\left(\bar{J}\right)^2 = p\ \bar{J} + qI$ olup $\bar{J} = pI - J^C$ de bir metalik yapı belirtir.

TM üzerinde metalik yapı ile hemen hemen çarpım yapı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

4.1.5. Teorem

P, M manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı olsun. P^C hemen hemen çarpım yapı TM de

$$J_1^C = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P^C, \tag{4.2}$$

$$J_2^C = \frac{p}{2}I - \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P^C \tag{4.3}$$

gibi iki farklı metalik yapı indirger. Karşıt olarak TM de J^C metalik yapı

$$P^C = \pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J^C - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I\right) \tag{4.4}$$

şeklinde iki farklı hemen hemen çarpım yapı üretir.

İspat

$P^2 = I$ ve $J_1^C = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)P^C$ olsun. $\left(J_1^C\right)^2 = pJ_1^C + qI$ sağlanıyor mu bunu incelemeliyiz.

$$\begin{aligned}
\left(J_1^C\right)^2 &= \left(J_1^C\right) \circ \left(J_1^C\right) \\
&= \frac{p^2}{4}I + 2\frac{p}{2}\left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)P^C + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)^2 \left(P^C\right)^2 \\
&= \frac{p^2}{4}I + p\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P^C + \left(\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}\right)^2 \left(P^C\right)^2 \\
&= \frac{p^2}{4}I + p\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P^C + \frac{p^2 + 4q}{4}I \\
&= \frac{p^2}{2}I + p\frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P^C + qI \\
&= p(\frac{p}{2}I + \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2}P^C) + qI \\
&= pJ_1^C + qI
\end{aligned}$$

olup $\left(J_1^C\right)^2 = pJ_1^C + qI$ dır. Dolayısıyla J_1^C bir metalik yapıdır. J_2^C nin de metalik yapı olduğu kolayca gösterilebilir.

Tersine, $(J^C)^2 = pJ^C + qI$ ve $P^C = \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J^C - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left(P^C\right)^2 &= P^C \circ P^C \\
&= \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J^C - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right) \circ \left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J^C - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right) \\
&= \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left(J^C\right)^2 - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}J^C I - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}J^C I + \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}I \\
&= \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}pJ^C + qI - 2.\frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}J^C I + \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}I \\
&= \frac{4(pJ^C+qI)}{p^2+4q} - \frac{4pJ^C I}{p^2+4q} + \frac{p^2}{p^2+4q}I \\
&= \frac{4pJ^C}{p^2+4q} + \frac{4qI}{p^2+4q} - \frac{4pJ^C}{p^2+4q} + \frac{p^2 I}{p^2+4q} \\
&= \frac{\left(p^2+4q\right)I}{p^2+4q} \\
&= I
\end{aligned}$$

O halde $\left(P^C\right)^2 = I$ dır. Dolayısıyla P^C hemen hemen çarpım yapıdır. Benzer şekilde $P^C = -\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J^C - \frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)$ içinde P^C nin hemen hemen çarpım yapı olduğu gösterilebilir.

4.1.6. Tanım

T, M manifoldu üzerinde hemen hemen tanjant yapı olsun. TM de

$$J_t^C = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right)T^C \tag{4.5}$$

ile tanımlanan J_t^C tensör alanına bir tanjant metalik yapı denir. J_t^C tanjant metalik yapı

$$\left(J_t^C\right)^2 = pJ_t^C + \frac{p^2}{4}I = 0 \tag{4.6}$$

denklemini sağlar.

4.1.7. Tanım

(M, C) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. TM de

$$J_c^C = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)C^C$$

ile tanımlanan J_c^C tensör alanına bir kompleks metalik yapı denir. J_c^C kompleks metalik yapı

$$\left(J_c^C\right)^2 - pJ_c^C + \frac{p^2 + 2q}{2}I = 0 \tag{4.7}$$

denklemini sağlar.

4.2. Tanjant Demette Metalik Yapıların İntegrallenebilirliği ve Paralelliği

$\forall\ X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ için sırasıyla P hemen hemen çarpım yapısı ve J metalik yapısının Nijenhuis tensörleri

$$N_P(X, Y) = P^2[X, Y] + [P(X), P(Y)] - P[P(X), Y] - P[X, P(Y)]$$

$$N_J(X, Y) = J^2[X, Y] + [J(X), J(Y)] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)]$$

dir. P hemen hemen çarpım yapısının ve J metalik yapısının Nijenhuis tensörlerinden hareketle P^C ve J^C nin Nijenhuis tensörleri şu formda elde edilir;

$$\begin{aligned} N_{P^C}(X^C, Y^C) = & \left(P^C\right)^2\left[X^C, Y^C\right] + \left[P^C X^C, P^C Y^C\right] - P^C\left[P^C X^C, Y^C\right] \\ & - P^C\left[X^C, P^C Y^C\right] \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} N_{J^C}(X^C, Y^C) = & \left(J^C\right)^2\left[X^C, Y^C\right] + \left[J^C X^C, J^C Y^C\right] - J^C\left[J^C X^C, Y^C\right] \\ & - J^C\left[X^C, J^C Y^C\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.2.1. Teorem

$\forall\ X,\, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $J^C = \frac{p}{2}I + \left(\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\right) P^C$ için N_{P^C} ile N_{J^C} arasında

$$N_{P^C}(X^C, Y^C) = \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} N_{J^C}(X^C, Y^C)$$

bağıntısı vardır.

İspat

Eş. 4.4 ve Eş. 4.8 eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki ifede elde edilir.

$$\begin{aligned}
N_{P^C}(X^C, Y^C) = & \left[X^C, Y^C\right] + \frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[2J^C X^C - pIX^C, 2J^C Y^C - pI(Y^C)\right] \\
& - \frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left(2J^C - pI\right)\left[2J^C X^C - pIX^C, Y^C\right] \\
& - \frac{1}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left(2J^C - pI\right)\left[X^C, 2J^C Y^C - pIY^C\right] \\
= & \left[X^C, Y^C\right] + \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[J^C X^C, J^C Y^C\right] - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[J^C X^C, Y^C\right] \\
& - \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[X^C, J^C Y^C\right] + \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[X^C, Y^C\right] \\
& - \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} J^C\left[J^C X^C, Y^C\right] + \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[J^C X^C, Y^C\right] \\
& + \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} J^C\left[X^C, Y^C\right] - \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[X^C, J^C Y^C\right] \\
& - \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} J^C\left[X^C, J^C Y^C\right] + \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[X^C, J^C Y^C\right] \\
& + \frac{2p}{(2\sigma_{p,q}-p)^2} J^C\left[X^C, Y^C\right] - \frac{p^2}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left[X^C, Y^C\right]
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
N_{P^C}(X^C, Y^C) = & \frac{4}{(2\sigma_{p,q}-p)^2}\left((J^C)^2\left[X^C, Y^C\right] + \left[J^C X^C, J^C Y^C\right] - J^C\left[J^C X^C, Y^C\right]\right. \\
& \left. - J^C\left[X^C, J^C Y^C\right]\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$N_{P^C}(X^C, Y^C) = \frac{4}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} N_{J^C}(X^C, Y^C)$$

olur.

R ve S, M manifoldu üzerinde tamamlayıcı dağılımlar olmak üzere Eş. 2.23 ve Eş. 3.11 den

$$\begin{aligned} &\left(r^C\right)^2 = r^C, \qquad \left(s^C\right)^2 = s^C, \\ &r^C + s^C = I, \qquad r^C s^C = s^C r^C = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

bağıntıları elde edilir. $r^C - s^C = P^C$ olmak üzere P^C nin hemen hemen çarpım yapısı olduğunu biliyoruz. O halde;

$$r^C + s^C = I, \quad r^C - s^C = P^C$$

olduğundan

$$r^C = \frac{1}{2}(I + P^C), \qquad s^C = \frac{1}{2}(I - P^C)$$

bulunur.

$$J^C = \frac{p}{2} I + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right) P^C$$

olmak üzere Eş. 3.14 ten

$$r^C = \frac{1}{2\sigma_{p,q} - p} J^C - \frac{p - \sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} I, \qquad s^C = -\frac{1}{2\sigma_{p,q} - p} J^C + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} I$$

bağıntıları elde edilir. Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 dan dolayı

$$J^C r^C = r^C J^C = \sigma_{p,q} r^C, \qquad J^C s^C = s^C J^C = (p - \sigma_{p,q})\, s^C \tag{4.11}$$

eşitlikleri vardır.

4.2.2. Teorem

TM de bir S dağılımının S^C tam lifti integrallenebilirdir gerek ve yeter şart S dağılımı M de integrallenebilirdir.

İspat

Lemma 3.2.1 den dolayı S dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$r\,[sX, sY] = 0 \tag{4.12}$$

dir. Bu denklemin her iki tarafının tam lifti alınırsa $r^C = (1-s)^C = 1 - s^C$, s^C nin tamamlayıcı projeksiyon tensörü olmak üzere

$$r^C\left[s^C X^C, s^C Y^C\right] = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir. O halde Eş. 4.12 ve Eş. 4.13 koşulları eş değerdir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.3. Teorem

$\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için S dağılımı M üzerinde integrallenebilir olsun. Yani Lemma 3.2.2 den

$$rN_J(sX, sY) = 0$$

dır. O halde S^C, TM de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart

$$r^C N_{J^C}(s^C X^C, s^C Y^C) = 0 \tag{4.14}$$

olmasıdır.

İspat

N_{J^C}, TM de J^C nin Nijenhuis tensör alanı olsun. Eş. 4.9 dan,

$$\begin{aligned}
N_{J^C}(s^C X^C, s^C Y^C) &= \left(J^2\right)^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] + \left[\left(p-\sigma_{p,q}\right) s^C X^C, \left(p-\sigma_{p,q}\right) s^C Y^C\right] \\
&\quad - J^C \left[\left(p-\sigma_{p,q}\right) s^C X^C, s^C Y^C\right] - J^C \left[s^C X^C, \left(p-\sigma_{p,q}\right) s^C Y^C\right] \\
&= \left(J^2\right)^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] + \left(p-\sigma_{p,q}\right)^2 \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&\quad - \left(p-\sigma_{p,q}\right) J^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] - \left(p-\sigma_{p,q}\right) J^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&= pJ^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] + q \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&\quad + \left(p-\sigma_{p,q}\right)^2 \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] - 2\left(p-\sigma_{p,q}\right) J^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&= \left(-2p+\sigma_{p,q}+p\right) J^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&\quad + \left(\left(p-\sigma_{p,q}\right)^2 + q\right) \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] \\
&= \left(-p+\sigma_{p,q}\right) J^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] + \left(\left(p-\sigma_{p,q}\right)^2 + q\right) \left[s^C X^C, s^C Y^C\right]
\end{aligned}$$

eşitliği

$$\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2} r^C$$

ile çarparsak

$$\frac{1}{\left(2\sigma_{p,q}-p\right)^2} r^C N_{J^C}(s^C X^C, s^C Y^C) = r^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] = \left(\underbrace{r\left[sX, sY\right]}_{0}\right)^C = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^C N_{J^C}(s^C X^C, s^C Y^C) = 0$$

olur.

4.2.4. Teorem

TM de R dağılımının R^C tam lifti integrallenebilirdir gerek ve yeter şart R, M de integrallenebilirdir.

İspat

Lemma 3.2.1 den dolayı R dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\forall\ X,Y \in \Im_0^1(M)$ için $s\,[rX,rY]=0$ dır. Bu denklemin her iki tarafının tam lifti alınarak,

$$s^C=(1-r)^C=1-r^C$$

r^C nin tamamlayıcı projeksiyon tensörü olmak üzere

$$s^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]=0 \tag{4.15}$$

dır. Bundan dolayı yukarıdaki iki koşul birbirine eş değerdir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.5. Teorem

$\forall\ X,Y \in \Im_0^1(M)$ için R dağılımı M de integrallenebilirdir. O halde, R^C dağılımı TM de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $s^C N_{J^C}(r^C X^C, r^C Y^C)=0$

İspat

Eş. 4.9 dan

$$\begin{aligned}
N_{J^C}(r^C X^C, r^C Y^C) &= \left(J^2\right)^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]+\left[J^C r^C X^C, J^C r^C Y^C\right]\\
&\quad -J^C\left[J^C r^C X^C, r^C Y^C\right]-J^C\left[r^C X^C, J^C r^C Y^C\right]\\
&=\left(J^2\right)^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]+\left[\sigma_{p,q} r^C X^C, \sigma_{p,q} r^C Y^C\right]\\
&\quad -J^C\left[\sigma_{p,q} r^C X^C, r^C Y^C\right]-J^C\left[r^C X^C, \sigma_{p,q} r^C Y^C\right]\\
&=\left(J^2\right)^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]+\sigma_{p,q}^2\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]\\
&\quad -\sigma_{p,q} J^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]-\sigma_{p,q} J^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]\\
&=pJ^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]+q\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]+p\sigma_{p,q}\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]\\
&\quad +q\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]-2\sigma_{p,q} J^C\left[r^C X^C, r^C Y^C\right]
\end{aligned}$$

$$= (p - 2\sigma_{p,q})\, J^C \left[r^C X^C, r^C Y^C \right] + (p\sigma_{p,q} + 2q) \left[r^C X^C, r^C Y^C \right]$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} s^C$$

ile çarpılırsa

$$\frac{1}{(2\sigma_{p,q} - p)^2} s^C N_{J^C}(r^C X^C, r^C Y^C) = s^C \left[r^C X^C, r^C Y^C \right] = (s\,[rX, rY])^C = 0$$

bulunur. O halde ispat tamamlanır.

4.2.6. Teorem

M deki her X, Y vektör alanı için J metalik yapısı M de integrallenebilir olsun. Yani $N_J(X, Y) = 0$ dır. O halde J^C metalik yapısı da TM de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $N_{J^C}(X^C, Y^C) = 0$ dır.

İspat

$N_{J^C}(X^C, Y^C) = [N_J(X, Y)]^C$ eşitliğinden ispat açıktır.

4.2.7. Teorem

P, M manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım çarpım yapı ve J nin tam lifti J^C, TM de metalik yapı olsun. O halde J^C, TM de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart, P, M de integrallenebilirdir.

4.2.8. Teorem

J nin J^C tam lifti TM de integrallenebilirse R^C ve S^C dağılımları da TM de integrallenebilirdir.

∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$\nabla_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C$$

şartını sağlayan TM de tek türlü ∇^C lineer konneksiyon vardır [21].

Böylece, TM de $\left(J^C, \nabla^C\right)$ çifti yardımıyla başka iki lineer konneksiyon tanımlayabiliriz.

i) Scouten Konneksiyonu

$$\overline{\nabla}_{X^C}^C Y^C = r^C(\nabla_{X^C}^C r^C Y^C) + s^C(\nabla_{X^C}^C s^C Y^C) \tag{4.16}$$

ii) Vranceanu Konneksiyonu

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X^C}^C Y^C =& r^C(\nabla_{X^C}^C r^C Y^C) + s^C(\nabla_{X^C}^C s^C Y^C) + r^C\left[s^C X^C, r^C Y^C\right] \\ &+ s^C\left[r^C X^C, s^C Y^C\right] \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2.9. Teorem

∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. r^C ve s^C projeksiyonları TM üzerindeki ∇^C lineer konneksiyonu için Shouten, Vranceanu konneksiyonlarına göre pareleldir. Üstelik J^C Shouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre pareleldir.

İspat

Parelellik tanımından $\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{X^C}^C r^C Y^C =& \overline{\nabla}_{X^C}^C r^C Y^C - r^C\left(\overline{\nabla}_{X^C}^C Y^C\right) \\ =& r^C \overline{\nabla}_{X^C}^C Y^C - r^C \overline{\nabla}_{X^C}^C Y^C = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{\nabla}^C_{X^C} r^C\right) Y^C = \overline{\nabla}^C_{X^C} r^C Y^C - r^C(\overline{\nabla}^C_{X^C} Y^C)$$
$$= r^C \left(\overline{\nabla}^C_{r^C X^C} r^C Y^C\right) + r^C \left[s^C X^C, s^C Y^C\right] - r^C \left(\overline{\nabla}^C_{r^C X^C} r^C Y^C\right)$$
$$- r^C \left[s^C X^C, r^C Y^C\right] = 0$$

bulunur.

Eşitlikler benzer şekilde s^C için yazılabilir. Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 den J^C, Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre pareleldir.

M üzerinde bir D dağılımının ∇ lineer konneksiyonuna göre parelel olması, $X \in \Im^1_0(M)$ ve $Y \in D$ için $\nabla_X Y \in D$ olması demektir [4].

D, ∇ lineer konneksiyonuna göre parelel olsun. Böylece, TM de D^C dağılımının TM de ∇^C lineer konneksiyonuna göre parelel olması, $X^C \in \Im^1_0(TM)$ ve $Y^C \in D^C$ için $\nabla^C_{X^C} Y^C \in D^C$ olması anlamına gelir.

4.2.10. Teorem

R^C ve S^C dağılımları TM de ∇^C lineer konneksiyonu için Schouten ve Vranceanu konneksiyonlarına göre pareleldir.

İspat

$X \in \Im^1_0(M)$ ve $Y \in R$ olsun. Buradan $X^C \in \Im^1_0(TM)$ ve $Y^C \in R^C$dir. $(sY)^C = 0$, $r^C Y^C = (rY)^C = Y^C$ olduğundan

$$\overline{\nabla}^C_{X^C} Y^C = r^C \left(\nabla^C_{X^C} Y^C\right) \in R^C$$

$$\overline{\overline{\nabla}}^C_{X^C} Y^C = r^C \left(\nabla^C_{r^C X^C} Y^C\right) + r^C \left[s^C X^C, Y^C\right] \in R^C$$

bulunur. Benzer eşitlikler s^C içinde sağlanır.

4.3. Tanjant Demette Metalik Yarı-Riemann Metrikler

M bir C^{∞} manifold ve g, M de bir yarı riemann metrik ve M üzerinde P bir hemen hemen çarpım yapı olsun. O halde $\left(g^{C}, P^{C}\right)$ ikilisi TM üzerinde bir yarı-Riemann hemen hemen çarpım yapıdır gerek ve yeter şart (g, P) de M üzerinde yarı-Riemann hemen hemen çarpım yapıdır.

$$g^{C}(P^{C}X^{C}, P^{C}Y^{C}) = g^{C}(X^{C}, Y^{C})$$

ya da denk olarak (bir $g^{C}-$ simetrik endomorfizm)

$$g^{C}(P^{C}X^{C}, Y^{C}) = g^{C}(X^{C}, P^{C}Y^{C})$$

dir [16].

4.3.1. Lemma

P hemen hemen çarpım yapısı bir $g-$ simetrik endomorfizmdir gerek ve yeter şart J^{C} metalik yapısı da $g^{C}-$ simetrik endomorfizmdir.

İspat

$X, Y \in \chi(M)$ için $g(PX, Y) = g(X, PY)$ olsun. Bu eşitliğin her iki tarafın tam lifti alınırsa

$$g^{C}(P^{C}X^{C}, Y^{C}) = g^{C}(X^{C}, P^{C}Y^{C})$$

bulunur.

$$J^{C} = \frac{p}{2}I + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}P^{C}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$P^C = \frac{2\left(J^C - \frac{p}{2}I\right)}{2\sigma_{p,q} - p}$$

dır.

$$g^C(P^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, P^C Y^C)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& g^C\left(\frac{2\left(J^C - \frac{p}{2}I\right)}{2\sigma_{p,q} - p}X^C, Y^C\right) = g^C(X^C, \frac{2\left(J^C - \frac{p}{2}I\right)}{2\sigma_{p,q} - p}Y^C) \\
\Rightarrow\ & \frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}\left[g^C(J^C X^C, Y^C) - \frac{p}{2}g^C(X^C, Y^C)\right] = \frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}\left[g^C(X^C, J^C Y^C)\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. -\frac{p}{2}g^C(X^C, Y^C)\right] \\
\Rightarrow\ & g^C(J^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, J^C Y^C)
\end{aligned}$$

dir.

$\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M)$ için $g^C(J^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, J^C Y^C)$ olsun.

$$J^C = \frac{p}{2}I + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}P^C$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
& g^C(J^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, J^C Y^C) \\
\Rightarrow\ & g^C\left(\left(\frac{p}{2}I + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}P^C\right)X^C, Y^C\right) = g^C\left(X^C, \left(\frac{p}{2}I + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}P^C\right)Y^C\right) \\
\Rightarrow\ & \frac{p}{2}g^C(X^C, Y^C) + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}g^C(P^C X^C, Y^C) = \frac{p}{2}g^C(X^C, Y^C) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{(2\sigma_{p,q} - p)}{2}g^C(X^C, P^C Y^C) \\
\Rightarrow\ & g^C(P^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, P^C Y^C) \\
\Rightarrow\ & g(PX, Y) = g(X, PY)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3.2. Tanım

TM üzerinde metalik yarı-Riemann yapı

$$g^C(J^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, J^C Y^C)$$

ile tanımlı bir $\left(g^C, P^C\right)$ çiftidir. (TM, g^C, J^C) üçlüsü bir metalik yarı-Riemann manifolddur.

4.3.3. Teorem

Eğer J M de bir metalik yarı-Riemann yapı ise J nin J^C tam lifti TM de metalik yarı-Riemann yapıdır.

4.3.4. Lemma

(M, g, J) bir metalik Riemann manifold olsun. $\left(TM, g^C, J^C\right)$ metalik Riemann manifoldu üzerinde

i) r^C, s^C projeksiyonları g^C simetriktir. Yani

$$g^C(r^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, r^C Y^C), \qquad g^C(s^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, s^C Y^C)$$

dir.

ii) R^C, S^C dağılımları g^C ortogonaldir. Yani $g^C(r^C X^C, s^C Y^C) = 0$ dır.

iii) TM deki J^C metalik yapısı, N_{J^C} simetriktir. Yani,

$$N_{J^C}(J^C X^C, Y^C) = N_{J^C}(X^C, J^C Y^C)$$

dir.

İspat

i) $r^C = \frac{1}{2\sigma_{p,q}-p} J^C - \frac{p-\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q}-p} I$ ve $g^C(J^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, J^C Y^C)$ olduğunu biliyoruz. O halde $J^C = (2\sigma_{p,q} - p)\, r^C + (p - \sigma_{p,q})\, I$ için

$$g^C((2\sigma_{p,q} - p)\, r^C + (p - \sigma_{p,q})\, I X^C, Y^C) = g^C(X^C, (2\sigma_{p,q} - p)\, r^C + (p - \sigma_{p,q})\, I Y^C)$$
$$\Rightarrow g^C(r^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, r^C Y^C)$$

olur. Benzer biçimde

$$s^C = -\frac{1}{2\sigma_{p,q} - p} J^C + \frac{\sigma_{p,q}}{2\sigma_{p,q} - p} I$$

içinde

$$g^C(s^C X^C, Y^C) = g^C(X^C, s^C Y^C)$$

dir.

ii) R^Cve S^C dağılımları tümleyen dağılımlar olduğundan $TM = R^C \oplus S^C$ dir. Buradan $\left(R^C\right)^{\perp} = S^C$ ve $\left(S^C\right)^{\perp} = R^C$ dir. Bunlar göz önüne alındığında $g(R^C X^C, S^C Y^C) = 0$ yazılır. Böylece ortogonallik gösterilmiş olur.

iii) Eş. 4.9 dan

$$\begin{aligned} N_{J^C}(J^C X^C, Y^C) =& (J^C)^2 \left[J^C X^C, Y^C\right] + \left[\left(J^C\right)^2 X^C, J^C Y^C\right] - J^C \left[\left(J^C\right)^2 X^C, Y^C\right] \\ & - J^C \left[J^C X^C, J^C Y^C\right] \\ =& pJ^C \left[J^C X^C, Y^C\right] + q \left[J^C X^C, Y^C\right] + \left[pJ^C X^C, J^C Y^C\right] \\ & + \left[qX^C, J^C Y^C\right] - J^C \left[pJ^C X^C, Y^C\right] \\ & - J^C \left[qX^C, Y^C\right] - J^C \left[J^C X^C, Y^C\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}N_{J^C}(X^C, J^C Y^C) =&(J^C)^2 \left[X^C, J^C Y^C\right] + \left[J^C X^C, \left(J^C\right)^2 Y^C\right] - J^C \left[J^C X^C, J^C Y^C\right] \\ &- J^C \left[X^C, \left(J^C\right)^2 Y^C\right] \\ =&pJ^C \left[X^C, J^C Y^C\right] + q \left[X^C, J^C Y^C\right] + \left[J^C X^C, pJ^C Y^C\right] \\ &+ \left[J^C X^C, qJ^C Y^C\right] - J^C \left[J^C X^C, J^C Y^C\right] \\ &- J^C \left[X^C, pJ^C Y^C\right] - J^C \left[X^C, qJ^C Y^C\right]\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$N_{J^C}(J^C X^C, Y^C) = N_{J^C}(X^C, J^C Y^C)$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hretcanu ve Crasmareanu kökleri metal oranı veren denklem yardımı ile bir dferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bir mealik yapı tanımlamışlardır [8]. Özkan ve Yılmaz bu metalik yapının geometrisini incelemişlerdir [19, 25].

Biz de bu tezimizde, elde edilen metalik yapıyı tam lift yardımı ile TM tanjant demete taşıdık. Yani M de bir metalik yapı varsa TM de bir metalik yapı inşa edebiliyoruz. Ayrıca M üzerinde bir metalik yapı için verilen teoremlerin metrik hariç TM de korunduğunu gördük. M de verilen Riemann metriğinin tam lifti TM de yarı-Riemann metriği olmaktadır. Bundan dolayı metrikle alakalı tanım ve teoremler TM de yarı-Riemann metriği için tanımlanmış ve ispatlanmıştır.

Çalışmanın devamı, M üzerinde verilen bir metalik yapının yüksek dereceden tanjant demetlere taşınması ve geometrisinin incelenmesi olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Bejancu, A. and Farran, H. R. (2006). *Foliations and Geometric Structures.* Mathematics and its Aplications 580. New York: Springer, 1-9, 256-258.

2. Brickell, F. and Clark, R. S. (1970). *Differentiable Manifolds.* London: VRN Company, 12-28, 34-41, 54-58, 152-153.

3. Civelek, Ş. (1988). *İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Liftler*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 35-45 .

4. Crasmareanu, M. and Hretcanu, C. E. (2008). Golden differential geometry. *Chaos, Solitions and Fractals*, 38, 1229-1238.

5. Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N. (2003). *Tensör Geometri.* Ankara: Hacısalihoğlu Yayınları, 79-80, 153-154.

6. Hacısalihoğlu, H. H. (2006). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş.* Elazığ: Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 139-140.

7. Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R. (1972). *Connection, Curvature and Cohomology 1-2.* New York: Academic Press, 44-48.

8. Hretcanu, C. E. and Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds. *Revista Union Math Argentina*, 54(2), 15-27.

9. Lee, J. M. (1987). *Manifolds and Differential Geometry.* New York: Marcel Dekker Inc., 7-10, 27-28, 37-43, 126-127, 390-392.

10. Peltek, B. (2014). *Gümüş Diferensiyel Geometri.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 31-63.

11. Okubo, T. (1987). *Differential Geometry.* New York: Marcel Dekker Inc., 7-10, 27-28, 37-43, 126-127, 390-392.

12. Omran, T., Sharffuddin, A. and Husain, S. I. (1984). Lifts of structures on manifolds. *Publications De L'institut Math.*, 36(50), 93-97 .

13. Özkan, M. and Peltek, B. (2013). *Silver differential geometry.* II. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo-Bosnia and Herzegovina, 273.

14. Özkan M. and Peltek B. (2016). A new structure on manifolds: Silver structure. *International Electronic Journal of Geometry*, 9(2), 59-69.

15. Özdemir, F. and Crasmareanu, M. (2010). Geometrical objects associated to

substructure. *Turkish J. Math.*, 34, 15-27.

16. Özkan, M. (2014). Prolongations of golden structures to tangent bundles. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, 16, 227-238.

17. Özkan M., Taylan E. and Çıtlak A. A. (2017). On lifts of silver structure. *Journal of Science and Arts*, 2(39), 223-234.

18. Özkan, M. and Yılmaz, F. (2015). *Bronz yapı.* 14. Matematik Sempozyumu, Niğde, 109-110.

19. Özkan, M. and Yılmaz, F. (2018). Metallic structures on differentiable manifolds. *Journal of Science and Arts*, 3(44), 645-660.

20. Saunders, D. J. (1989). *The Geometry of Jet Bundles.* Cambridge: Cambridge University Press., 1-36

21. Yano, K. and Ishihara, S. (1967). Almost complex structures induced in tangent bundles. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 19, 1-27.

22. Yano, K. and Ishihara, S. (1973). *Tangent and Cotangent Bundles.* New York: Marcel Decker Inc., 4-25, 40-45, 315-344.

23. Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds.* New York: World Scientific, 170-180.

24. Yardımcı, E. H. (2010). *Altın Manifoldlar*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 35-84.

25. Yılmaz, F. (2016). *Metalik Diferensiyel Geometri*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 28-76.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: UZ, Emre Ozan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.08.1989 Mersin
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: -
e-mail	: emre_ozan_uz@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Çukurova Üniversitesi/Matematik Böl.	2013
Lise	Çankaya Anadolu Lisesi	2008

İş Deneyimi

2014	Seviye Koleji	Öğretmenlik yaptı.
2016	Sınav Koleji	Öğretmenlik yaptı.
2017	Gazi Üniversitesi Vakfı Özel Okulları	Öğretmenlik yapıyor.

Yabancı Dil

İngilizce ve almanca

Yayınlar

1. Özkan, M. and Uz, E.O. (2016). *Metalik yapıların tanjant demetlere liftleri*, 14th International Geometry Symposium, Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

Hobiler

Yüzme ve tenis.

GAZİ GELECEKTİR...