BASKIN VE BASKIN OLMAYAN ÇOZÜMLERİN DAVRANIŞLARI

Adil Hussein Mustafa QAROOT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANKARA-2015

Adil HUSSEIN MUSTAFA QAROOT tarafından hazırlanan “BASKIN VE BASKIN OLMAYAN ÇÖZÜMLERİN DAVRANIŞLARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ..…………………

Başkan: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Üye: Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 08 / 05 / 2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmaların derleme niteliğinde olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Adil Hussein Mustafa QAROOT

08 / 05 / 2015

BASKIN VE BASKIN OLMAYAN ÇÖZÜMLERİN DAVRANIŞLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Adil Hussein Mustafa QAROOT

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAYIS 2015

ÖZET

Bilindiği üzere diferansiyel denklemler geniş bir uygulama alanına sahiptir. Diferansiyel denklemler için baskın ve baskın olmayan çözümlerin davranışı son yıllarda çok ilgi duyulan araştırma konularından biri olmuştur ve çözümlerin davranışı ile ilgili geniş bir literatür meydana gelmiştir. Bu literatür bilgilerden yararlanarak bu tezde ikinci ve daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemler için baskın ve baskın olmayan çözümlerin davranışları irdelenmektedir. 1963 yılından bu yana çözümler, diferansiyel denklemlerin salınımlılık ve asimptotik davranışlarını elde etmek için kullanılmıştır.

Bilim Kodu	: 204. 1.138
Anahtar Kelimeler	: Baskın çözümler, Baskın olmayan çözümler, Diferansiyel denklemler.
Sayfa Adedi	: 59
Danışman	: Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

THE BEHAVIORS OF THE PRINCIPAL AND NONPRINCIPAL SOLUTIONS

(M.Sc. Thesis)

Adil Hussein Mustafa QAROOT

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

MAY 2015

ABSTRACT

As is known differential equations have a broad field of application. The behavior of the principal and nonprincipal solutions has been one of the most interested research areas in recent years and a large literature has been established in relation with the behavior of solutions. Utilizing this literature behaviors of principal and nonprincipal solutions for the second or higher degree differential equations are examined in this thesis. Since 1963, solutions have been used to obtain oscillatory and asymptotic behaviors of differential solutions.

Science Code	: 204. 1.138
Key Words	: Principal solutions, Nonprincipal solutions, Differential equations.
Page Number	: 59
Supervisor	: Assoc. Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşturulması esnasında engin birikimi, sabrı ve yol göstericiliği ile bu günlere ulaşmamı sağlayan çok değerli tez hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ a bana kazandırmaya çalıştığı tüm değerler için minnettarlığımı ve şükranlarımı bildirmeyi bir görev kabul ediyorum. Ayrıca bu çalışmalarım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan annem ve bütün aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler uzun yıllardır dünyada çoğu bilim dallarında önemli bir yer tutmaktadır. Diferansiyel denklemlerin incelenmesi iyi bir matematik altyapısı gerektirir bu nedenle her denklemin çözümünü bilmek istememiz doğaldır. Diferansiyel denklemler sadece matematikte değil aynı zamanda Fizik, Biyoloji, Tıp, İstatistik, Sosyoloji, Psikoloji ve Ekonomi gibi alanlarda da kullanmaktadır.

Diferansiyel denklemlerin salınımlılık ve asimptotik davranışını elde etmek için baskın ve baskın olmayan çözümler kullanılmıştır. Bu çözümlerin davranışları üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda oldukça dikkat çekicidir. Çalışmamıza esas teşkil edecek ikinci ve daha yüksek basamaktan diferansiyel denklemlerdir. Amacımız bu denklemler için baskın ve baskın olmayan çözümlerin davranışlarını irdelemektir.

Amaca yönelik temel tanım, teoremler ve bir kaç çalışma üzerinden kısa bir literatür taraması verilecektir. Son kısımda da son zamanda Ertem ve Zafer [1] tarafından ele alınan ikinci basamaktan

$$\left(p(t)x'\right)' + q(t)x = f(t,x)$$

diferansiyel denkleminin çözümleri için asimptotik integrasyon problemi irdelenecektir ve bununla ilgili teoremler, teoremlerle ilgili özel durumlar ve örnekler verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

İkinci basamaktan

$$\left(p(t)x'\right)' + q(t)x = 0 \tag{2.1}$$

lineer diferansiyel denklemi pozitif bir çözüme ya da sonsuzda salınımsız çözümü var ise sırasıyla baskın ve baskın olmayan çözümler olarak tanımlanan Eş. 2.1 denkleminin iki tane lineer bağımsız u ve v özel çözümü vardır.

u baskın çözümü bir sabit katı ile tektir ve u çözümünün herhangi lineer bağımsız bir v çözümü baskın olmayan çözümdür. u ve v çözümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir: $t_* \geq t_0$ yeterince büyük olmak üzere

(i) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u(t)}{v(t)} = 0$

veya

(ii) $t_* \geq t_0$ için $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} = \infty$ ve $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} < \infty$

veya

(iii) $t \geq t_*$ için $\dfrac{p(t)v'(t)}{v(t)} > \dfrac{p(t)u'(t)}{u(t)}$

dir.

Ayrıca, bu çözümler $Lx=\left(p\left(t\right)x'\right)'+q\left(t\right)x$ operatörünün $Lx=\dfrac{1}{u\left(t\right)}\left[p\left(t\right)u^{2}\left(t\right)\left(\dfrac{x}{u\left(t\right)}\right)'\right]'$ Trench Faktorizasyonunda görünür. u, v ile yer değiştirilirse faktorizasyon yine doğrudur.

Şimdi kullanılacak olan Eş. 2.1 denklemini bir integral denklemine çevirdiğinde özellikle kullanışlı olan faktorizasyonları ispatları ile birlikte verelim.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Teorem [2, Teorem 5.53 (Polya Faktorizasyon)].

$J\subset I$ üzerinde $Lx=\left(p\left(t\right)x'\right)'+q\left(t\right)x=0$ pozitif bir u çözümüne sahip olsun. Böylece $x\in D$ ve $t\in J$ için

$$\rho_1(t):=\frac{1}{u(t)}>0 \text{ ve } \rho_2(t):=p(t)u^2(t)>0$$

olmak üzere $t\in J$ için

$$Lx(t)=\rho_1(t)\left\{\rho_2(t)\left[\rho_1(t)x(t)\right]'\right\}'$$

elde edilir.

İspat. $x\in D$ ve $Lx=0$ denkleminin pozitif bir çözümü u olsun. Böylece Lagrange özdeşliğinden $t\in J$ için

$$u(t)Lx(t)=\left\{p(t)w\left[u(t),x(t)\right]\right\}'$$

$$=\left\{p(t)\left[u(t)x'(t)-u'(t)x(t)\right]\right\}'$$

$$= \left\{ p(t)u^2(t) \frac{\left[u(t)x'(t) - u'(t)x(t)\right]}{u^2(t)} \right\}'$$

$$= \left\{ p(t)u^2(t) \left[\frac{x(t)}{u(t)} \right]' \right\}'$$

$$= \left\{ \rho_2(t) \left[\rho_1(t)x(t) \right]' \right\}'$$

$$Lx(t) = \rho_1(t) \left\{ \rho_2(t) \left[\rho_1(t) x(t) \right]' \right\}'$$

elde edilir.

$$\rho_1(t) \left\{ \rho_2(t) \left[\rho_1(t) x(t) \right]' \right\}' = 0$$

diferansiyel denklemi $Lx = 0$ diferansiyel denkleminin Polya Faktorizasyonudur. Teorem 2.1. in ispatından faktorizasyonu elde etmek için $Lx = 0$ ın J üzerinde sıfıra sahip olmayan sadece bir u çözüme sahip olduğu kabulüne ihtiyaç vardır. Fakat J üzerinde $u(t) < 0$ ise J üzerinde $\rho_1(t) < 0$ dür. $i = 1,2$ için J üzerinde $\rho_i(t) > 0$ olduğunda bizim faktorizasyonumuz bir Polya Faktorizasyon olarak tanımlanır. Tersine, sadece bir faktorizasyondur.

2.1.2. Teorem [2, Teorem 5.58 (Trench Faktorizasyon)].

$-\infty < a < b \leq \infty$ olmak üzere $[a,b) \subset I$ üzerinde $Lx = 0$ denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Böylece

$$\int_a^b \frac{ds}{\gamma_2(s)} = \infty$$

ile $t \in [a,b)$ ve $x \in D$ için

$$Lx(t) = \gamma_1(t)\left\{\gamma_2(t)\left[\gamma_1(t)x(t)\right]'\right\}'$$

olacak şekilde $[a,b)$ üzerinde γ_1 ve γ_2 pozitif fonksiyonları vardır.

İspat. $-\infty < a < b \leq \infty$ olmak üzere $[a,b) \subset I$ aralığında, $Lx = 0$ denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Böylece Teorem 2.1. den L operatörü $[a,b)$ üzerinde bir Polya Faktorizasyonuna sahiptir. Yani, $x \in D$ ise $t \in [a,b)$ için

$$Lx(t) = \rho_1(t)\left\{\rho_2(t)\left[\rho_1(t)x(t)\right]'\right\}'$$

dir. $t \in [a,b)$ ve $i = 1,2$ için

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{\rho_i(t)}$$

olsun. Böylece $x \in D$ ve $t \in [a,b)$ için

$$Lx(t) = \frac{1}{\alpha_1(t)}\left\{\frac{1}{\alpha_2(t)}\left[\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right]'\right\}'$$

elde edilir. Eğer

$$\int_a^b \alpha_2(s)\,ds = \infty$$

ise bir Trench Faktorizasyonu elde edilir ve bu durumda ispat tamamlanır. Şimdi

$$\int_a^b \alpha_2(s)ds < \infty$$

olsun. Bu durumda $t \in [a,b)$ için

$$\beta_1(t) := \alpha_1(t)\int_{t_0}^b \alpha_2(s)ds \text{ ve } \beta_2(t) := \frac{\alpha_2(t)}{\left(\int_{t_0}^b \alpha_2(s)ds\right)^2}$$

olsun. Böylece

$$\int_a^b \beta_2(s)ds = \int_a^b \frac{\alpha_2(s)}{\left(\int_s^b \alpha_2(u)du\right)^2}ds$$

$$= \lim_{c\to b^-}\int_a^c \frac{\alpha_2(s)}{\left(\int_s^b \alpha_2(u)du\right)^2}ds$$

$$= \lim_{c\to b^-}\left[\left(\int_s^b \alpha_2(u)du\right)^{-1}\right]_a^c$$

$$= \infty$$

elde edilir. $x \in D$ olsun ve

$$\left(\frac{x(t)}{\beta_1(t)}\right)' = \left(\frac{\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}}{\int_{t_0}^b \alpha_2(s)ds}\right)'$$

$$=\frac{\left(\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right)'\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds-\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\left(-\alpha_2(t)\right)}{\left(\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right)'\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds+\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\left(\alpha_2(t)\right)}{\left(\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds\right)^2}$$

göz önüne alınsın. Buna göre,

$$\frac{1}{\beta_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\beta_1(t)}\right)'=\left(\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds\right)\left[\frac{1}{\alpha_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right)'\right]+\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}$$

ve böylece

$$\left[\frac{1}{\beta_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\beta_1(t)}\right)'\right]'=\int_{t_0}^{b}\alpha_2(s)ds\left[\frac{1}{\alpha_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right)'\right]'$$

bulunur. Son olarak, $t\in[a,b)$ için

$$\frac{1}{\beta_1(t)}\left[\frac{1}{\beta_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\beta_1(t)}\right)'\right]'=\frac{1}{\alpha_1(t)}\left[\frac{1}{\alpha_2(t)}\left(\frac{x(t)}{\alpha_1(t)}\right)'\right]'$$

$$=Lx(t)$$

elde edilir.

Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$\int_a^b \alpha_2(s)ds = \infty$$

dur.

Sonuç olarak, Trench Faktorizasyonu elde edilir.

2.1.3. *Örnek*. İkinci basamaktan

$$x'' - 3x' + 2x = 0$$

diferansiyel denkleminin sonsuzda baskın ve baskın olmayan çözümleri vardır ve bu çözümlerin (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağladığı gösterilsin.

Bu diferansiyel denklemin self-adjoint formu $p(t) = e^{-3t}$ ve $q(t) = 2e^{-3t}$ olmak üzere

$$\left(e^{-3t}x'\right)' + 2e^{-3t}x = 0$$

olur. Böylece diferansiyel denkleminin iki çözümü e^t ve e^{2t} şeklindedir. Verilen diferansiyel denklemin $\mathbb{R}$ üzerinde "disconjuge" olduğu gösterilir. $u(t) = e^t$ ve $v(t) = e^{2t}$ alınırsa ilk olarak,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{e^{2t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

ikinci olarak,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{p(s)u^2(s)} = \int_0^\infty e^s ds = \infty$$

üçüncü olarak,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{p(s)v^2(s)} = \int_0^\infty e^{-s} ds < \infty$$

ve son olarak $t \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{p(t)v'(t)}{v(t)} = 2e^{-3t} > e^{-3t} = \frac{p(t)u'(t)}{u(t)}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla, $u(t) = e^t$ baskın ve $v(t) = e^{2t}$ baskın olmayan çözümdür.

2.1.4. *Örnek*. İkinci basamaktan

$$x'' + x = 0$$

diferansiyel denkleminin π de baskın ve baskın olmayan çözümleri vardır ve bu çözümlerin (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağladığı gösterilsin.

$u(t) = \sin t$ ve $v(t) = \cos t$ olduğunu kabul edilsin. Böylece

$$\lim_{t\to\pi^-} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t\to\pi^-} \tan t = 0$$

dır. Ayrıca ilk olarak,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \csc^2 s ds = \infty$$

ikinci olarak,

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sec^2 s ds < \infty$$

son olarak $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için

$$\frac{p(t)v'(t)}{v(t)} = -\tan t > \cot t = \frac{p(t)u'(t)}{u(t)}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla, $u(t) = \sin t$ baskın ve $v(t) = \cos t$ baskın olmayan çözümdür.

Şimdi diğer yardımcı temel tanım ve teoremler verilsin.

2.1.5. Lemma [1, Lemma 4.1]. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer

(a) Her $f \in M$ için $\| f \|_{L_{p(\Omega)}} \leq B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır;

(b) $(\tau_h f)(x) := f(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h)$ olmak üzere $h \to 0$ iken $\| \tau_h f - f \|_{L_{p(\Omega)}} \to 0$

ise $M \subset L_p(\Omega)$ kompakttır.

2.1.6. Tanım [2, Tanım 5.39]. $Lx = \left(p(t) x' \right)' + q(t) x$ diferansiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü J aralığında keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahip ise bu aralıkta salınımlı çözümdür denir. Tersine, söz konusu olan çözüm J aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahip ise bu aralıkta salınımsız çözüm denir.

2.1.7 Tanım [2, Tanım 5.39]. $Lx = 0$ denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı denklem denir.

2.1.8. Tanım. V boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y \in V$ ve $\alpha \in F$ için $V \times V$ den V ye tanımlı

$$+ : (x, y) \to x + y$$

fonksiyonu ve $F \times V$ den V ye tanımlı

$$\cdot : (\alpha, x) \to \alpha . x$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa V kümesine F cismi üzerinde bir Lineer uzaydır denir. Her $\alpha,\beta\in F$ ve her $x,y,z\in V$ için

- $x+y=y+x,\ x+(y+z)=(x+y)+z$
- $0\in V$ için $x+0=x$
- $-x\in V$ için $x+(-x)=0$
- $1x=x$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$
- $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Eğer $F=\mathbb{R}$ ise V ye reel vektör uzayı ve $F=\mathbb{C}$ ise V ye kompleks vektör uzayı denir. F nin elemanlarına Skaler ve V nin elemanlarına Vektör denir.

2.1.9. Tanım. K reel veya kompleks sayılar cismi ve X K cismi üzerinde bir lineer uzayı olsun. Her $x,y\in X$ ve her $a\in K$ için

- $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
- $\|a.x\|=|a|\|x\|$
- $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan $\|.\|:X\to\mathbb{R}_+,x\to\|x\|$ dönüşümüne X lineer uzayı üzerinde Norm denir.

Üzerinde bir norm tanımlanan X lineer uzayına Normlu lineer uzay denir. X normlu uzayı kısaca $(X,\|.\|)$ biçiminde gösterilir.

2.1.10. Tanım. X bir normlu lineer uzayı olsun. $(x_n)\subset X$, $n=1,2,...$ dizisi "$\forall\varepsilon>0$, $\forall p\in\mathbb{N}$ ve $\forall n>n_\varepsilon$ için $\|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır" koşulunu sağlıyorsa, (x_n) dizisine X normulu uzayında bir Cauchy dizisidir denir.

2.1.11. Tanım. Her Cauchy dizisi yakınsak olan normlu lineer uzaya tam uzay denir. Tam normlu lineer uzaya Banach uzayı denir.

2.1.12. Tanım. Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir ρ fonksiyonu $x, y, z \in X$ için

- $\rho(x,y) \geq 0$
- $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

şartlarını sağlıyorsa, ρ ye X üzerinde bir metrik, (X,ρ) ikilisine de Metrik uzayı denir.

2.1.13. Tanım. (X,ρ_x) metrik uzayı, kapalı $D \subset X$ kümesi ve $\varphi : D \to D$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$\rho_x\left(\varphi_x, \varphi_y\right) \leq \alpha.\rho_x\left(x, y\right) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ sayısı varsa $\varphi : D \to D$ dönüşümüne Daralma dönüşümü denir.

2.1.14. Tanım. (X,ρ_x) metrik uzayı ve $\varphi : X \to X$ dönüşümü verilsin.

$$\varphi x^* = x^* \tag{2.3}$$

denkleminin köklerine φ dönüşümünün Sabit noktası denir.

2.1.15. Teorem. (Metrik Uzaylarda Daralma Dönüşüm Prensibi (ya da Banach Sabit Nokta Teoremi))

(X,ρ_x) tam metrik uzayında tanımlı $\varphi : X \to X$ dönüşümü daralma dönüşümü ise A nın tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca, φ dönüşümü Eş. 2.2 yi sağlıyorsa $x_0 \in X$ herhangi nokta olmak üzere terimleri

$$x_n = \varphi x_{n-1} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan $n = 1, 2, ...$ için (x_n) dizisi x^* sabit noktasına yakınsıyor ve yakınsama hızı

$$\rho_x\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho_x\left(x_{1,} x_0\right) \tag{2.5}$$

eşitsizliği ile belirlenir.

2.1.16. Tanım. (X, ρ) metrik uzayı verilsin. Eğer $x_0 \in X$ için $D_r(x_0) \subset X$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı (ya da $D_r(x_0)$ yuvarı) varsa x_0 a X in bir İç noktası denir.

2.1.17. Tanım. X bir metrik uzayı $x_0 \in X$ noktası ve $r > 0$ reel sayısı verilsin.

- $D_r(x_0) = D(x_0; r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$ kümesine X te x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,
- $\bar{D}_r(x_0) = \bar{D}(x_0; r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ kümesine X te x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,
- $S_r(x_0) = S(x_0; r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = r\}$ kümesine de X te x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzey denir.

2.1.18. Tanım. X metrik uzayının, iç noktalarından oluşan kümesine Açık küme ve X teki açık kümelerin tümleyenine de Kapalı küme denir.

2.1.19. Tanım. X metrik uzayının boş olmayan $A \subset X$ kümesi için

$$\sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} = d(A)$$

sayısına A nın Çapı ve boş olmayan $A, B \subset X$ kümeleri için

$$\inf\{\rho(x, y) : x, y \in B\} = d(A, B)$$

sayısına da A ve B arasındaki Uzaklık denir. Bir $A \subset X$ kümesi için $d(A) < \infty$ oluyorsa A ya X te Sınırlı küme denir.

2.1.20. Tanım. Bir X lineer uzayının boş olmayan bir Y alt kümesi verilsin. Eğer her $y_1, y_2 \in Y$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$M_\lambda = \{ y \in X : y = \lambda . y_1 + (1-\lambda).y_2 \} \subset Y$$

oluyorsa, Y kümesine X te Dışbükey (ya da Konveks), aksi halde İçbükey (ya da Konkav) küme denir.

2.1.21. Tanım. X metrik uzayı içinde bir $n = 1, 2, ...$ için (x_n) dizisi ve $x_0 \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$ oluyorsa (x_n) dizisi x_0 a yakınsıyor denir ve bu deyim $n \to \infty$ iken $x_n \to x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

2.1.22. Teorem. (X, ρ) bir tam metrik uzayı ve L Lipschitz sabiti ile $F : X \to X$ bir daralma olsun. Böylece F tek bir $u \in X$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$$

ve

$$\rho\left(F^n(x), u\right) \le \frac{L^n}{1-L} \rho\left(x, F(x)\right)$$

dir.

2.1.23. Tanım. Normlu uzaydaki bir F operatörü, her sınırlı kümeyi karşılık gelen bir kompakt kümeye götürüyorsa kompakttır. Sürekli ve kompakt olan bir operatör tamamen süreklidir denir.

2.1.24. Tanım. $Lx = 0$ denkleminin aşikar olmayan çözümü $J \subset I$ aralığı üzerinde en fazla bir sıfıra sahip olduğunda söz konusu olan denkleme disconjuge denklemdir denir.

3. BASKIN VE BASKIN OLMAYAN ÇÖZÜMLER ÜZERİNDE LİTERATÜR TARAMASI

Baskın çözüm kavramı $t_* \geq t_0$ için

$$\left(p(t)x'\right)' + q(t)x = 0 \tag{2.1}$$

denklemine karşılık gelen belirli kuadratik fonksiyonelin pozitifliliğini inceleyerek Morse ve Leighton [3] tarafından 1936 yılında tanıtıldı.

Konu ile ilgili Ertem ve Zafer [1], Özbekler ve diğerleri [4], Dosly ve Rehak [5], Agarwal ve diğerleri [6], Wong [7], Chen [8,9], Simsa [10], Trench [11], Ladas [12] ve Hartman [13] nin çalışmaları yer almaktadır. Hamilton sistemleri, yarı-lineer diferansiyel denklemler, dinamik denklemlerin ve impulsif diferansiyel denklemler üzerine Özbekler ve Zafer [14], Zafer [15], Dosly ve Ünal [16], Dosla ve Dosly [17], Cecchi ve Dosla [18], Cecchi ve diğerleri [19] ve Dosly [20] da kaynak olarak alınabilir.

1971 yılında Ladas [12] de lineer olmayan

$$x^{(n)} + f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

formunda olan diferansiyel denklemlerinin baskın çözümleri için asimptotik ve salınımlılık davranışları ile ilgilenilmiştir.

3.1 Teorem [12, Teorem 2.4]

(i) $i = 1, 2, \ldots, n$ için $t_i \geq 0$ olacak şekilde $f\left(t, t_1, \ldots, t_n\right)$ azalmayan ve $t \geq 0$, $t_1 > 0$ için $f\left(t, t_1, \ldots, t_n\right) > 0$ olsun

ve

(ii) $\alpha > 0$ ve $i = 0, 1, \ldots, n-2$ için $A_i > 0$ olacak şekilde

$$\int_{t_0}^{\infty} f\left(s, A_{n-2}(s-\alpha)^{n-2}, \ldots, A_1(s-\alpha), A_0, 0\right) ds = 0 \tag{3.2}$$

olsun. (i) ve (ii) şartları sağlansın. Dolayısıyla $f \in C\left[R_+ \times R^n, R\right]$ ve $0 \le t < \infty$ için Eş. 3.1 denkleminin $t_0 \ge 0$ için $u(t) \equiv u(t, t_0)$ baskın çözümü (t_0, ∞) aralığında en az bir sıfıra sahiptir. Yani, Eş. 3.1 denklemi salınımlıdır.

1991 yılında Chen [9] de ikinci basamaktan

$$\left(r(t)x'\right)' + \left(f(t) + q(t)\right)x = 0 \tag{3.3}$$

lineer denkleminin baskın çözümü için asimptotik entegrasyonunu incelemiştir.

3.2. Teorem [9, Teorem] $g(t) = \int_{t_0}^{t} r^{-1}(s) u_1^{-2}(s) ds$ olmak üzere $t_1 \ge t_0$ için

$$\lim_{t \to \infty} \left[g(t) - g(t_1)\right]^{-1} \int_{t_1}^{t} g'(s) \left[\int_{t_1}^{s} u_1^2(\tau) q(\tau) d\tau\right] ds = c_{t_1}$$

var ve sonlu iken

$$Q(t) = c_{t_1} - \int_{t_1}^{t} u_1^2(s) q(s) ds$$

ve L sürekli fonksiyonlar kümesi olmak üzere $Q(t)$ var, $g'Q \in L$ ve

$$\int_{t}^{\infty} g g' Q^2 ds < \infty \tag{3.4}$$

sağlanıyorsa.Eş. 3.3 salınımsızdır, bazı $K > 0$ sabiti ve $i = 1, 2$ için

$$G(s,t)=\exp\left[2\int_t^s g'(\tau)Q(\tau)d\tau\right],$$

$$p(t)=\int_t^\infty g'(s)Q^2(s)G(s,t)ds,$$

$$G_i(s,t)=\exp\left[2\int_t^s g'(\tau)\big(Q(\tau)+ip(\tau)\big)d\tau\right],$$

$$H(t)=\int_t^\infty g'(s)Q(s)ds,$$

ve

$$p_1(t)=\int_{t_0}^\infty g'(s)\,p^2(s)G_1(s,t)ds$$

iken $P_2(t)$,

$$0\le P_2(t)\le K\int_{t_0}^\infty g'(s)P_1^2(s)ds \tag{3.5}$$

olacak şekilde $[b,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere. $t\ge b\ge a$ için

$$u(t)=u_1(t)\exp\left[-H(t)-\int_{t_0}^\infty g'Pds-\int_{t_0}^\infty g'P_1ds-\int_{t_0}^\infty g'P_2ds\right] \tag{3.6}$$

eşitliğini sağlayan Eş. 3.3 denklemi bir $u(t)$ baskın çözümüne sahiptir.

1999 yılında Wong [7] da $t\in[t_0,\infty)$ için

$$\big(p(t)x'\big)'+q(t)x=f(t) \tag{3.7}$$

ikinci basamaktan homogen olmayan lineer diferansiyel denklem ile ilgilendi. p, q ve f sürekli fonksiyonlar, $p>0$, $[t_0,\infty)$ üzerinde sürekli türevlenebilir, q ve f keyfi işaretli olmak üzere salınımlılık kriterlerleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Lineer homojen olmayan Eş. 3.7 denkleminin başlangıç şartlar her kümesi için tek çözüm vardır ve bu tür çözümlerin $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli olduğu bilinmektedir.

Bu problem üzerine Rainkin [21], Skidmore ve Bowers [22], Skidmore ve Leighton [23], Teufel [24] ve Keener [25] tarafından yapılan çalışmalarda $q(t)$ nin genellikle negatif olmayan kabul edilmiştir.

Wong [7] ise çalışmasında, f üzerinde bir kısıtlama getirmiştir ve $q(t)$ negatif olmamak üzere iki salınımlılık kriteri bulmaya çalışmıştır. $f(t)$ nin homogen olması yani,

$$Lx=\left(p(t)x'\right)'+q(t)x=0 \tag{3.8}$$

denkleminin salınımsız olması kabulü altında Eş. 3.7 denklemi için bir başka salınımlık teoremi elde etmiştir.

$v(t)$, Eş. 3.8 denkleminin baskın olmayan çözümü olsun. Yani,

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{p(s)v^2(s)}<\infty \tag{3.9}$$

sağlansın. Ayrıca, $H(t)$

$$H(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{p(s)v^2(s)}\left(\int_{t_0}^{s}f(u)v(u)du\right)ds \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlansın.

3.3. Teorem [7, Teorem 2]. Eş. 3.8 denklemi salınımsız ve $v(t)$ baskın olmayan çözüm olsun. Eğer

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} H(t) = -\underline{\lim}_{t\to\infty} H(t) = +\infty \tag{3.11}$$

ise Eş. 3.7 denklemi salınımlıdır.

2000 yılında Dosly ve Elbert [26] de ikinci basamaktan yarı lineer denkleminin baskın çözümü için integral karakteri ile bir teorem incelemiştir.

3.4. Teorem [26, Teorem 3.1] r, c sürekli fonksiyonlar, I aralığında $r(t)>0$, $p>1$ için

$$\phi_p(x) = |x|^{p-2} x \tag{3.12}$$

olmak üzere

$$\left(r(t)\phi_p(x')\right)' + c(t)\phi_p(x) = 0 \tag{3.13}$$

salınımsız ve yeterince büyük t için $u'(t) \neq 0$ olacak şekilde u çözümü olsun.

(i) $p \geq 2$ olsun. u bir baskın çözüm ise

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r(s)u^2(s)|u'(s)|^{p-2}} = \infty \tag{3.14}$$

sağlanır.

(ii) $p \in (1,2]$ olsun. Eş. 3.14 denklemi sağlanıyorsa u bir baskın çözümdür.

2005 yılında Cecchi ve diğerleri [19] tarafından yarı lineer denklemin baskın çözümü için karakteristik özellikleri (limit, integral) ile ilgili teoremler verilmiştir. İlk olarak limit teoremi verilsin.

3.5. Teorem [19, Teorem 2] $t \geq 0$ için $c(t)$, $r(t)$ pozitif ve sürekli olmak üzere Eş. 3.13 denklemi salınımsız ve u bir çözümü olsun. Dolayısıyla

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{x(t)}=0$$

olmak üzere $\lambda \in R$ için $x \neq \lambda u$ olacak şekilde Eş. 3.13 denkleminin herhangi bir x çözümünün olması u nun baskın çözüm olması için gerek ve yeter şarttır.

Şimdi de integral teoremi verilsin.

3.6. Teorem [19, Teorem 3] Eş. 3.13 denklemi salınımsız, ϕ_P^*, ϕ ın tersi olmak üzere

$$J_r=\lim_{T\to\infty}\int_{t_0}^{T}\phi_P^*\left(\frac{1}{r(t)}\right)dt \text{ ve } J_c=\lim_{T\to\infty}\int_{t_0}^{T}c(t)\,dt$$

olacak şekilde $J_r+J_c=\infty$ olsun. Denklemin bir u çözümünün baskın olması için gerek ve yeter şart

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{u'(s)}{u^2(s)c(t)\phi_p(u'(s))}ds=\infty$$

(3.15)

olmasıdır.

2006 yılında Dosly ve Lomtatidze tarafından [27] de ikinci basamaktan Eş. 3.13 yarı lineer diferansiyel denklemi için salınımlılık özellikleri incelenmiştir.

3.7. Teorem [27, Teorem 1] u çözümü

$$\left(r(t)\phi_p(x')\right)'+\tilde{c}(t)\phi_p(x)=0 \qquad (3.16)$$

salınımsız denklemin baskın çözümü ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(c(s)-\tilde{c}(s)\right)u^p(s)\,ds:=\lim_{b\to\infty}\int_{t_0}^{b}\left(c(s)-\tilde{c}(s)\right)u^p(s)\,ds=\infty \qquad (3.17)$$

olsun. Böylece Eş.3.13 denklemi salınımlıdır.

2009 yılında ise Zafer [15] te dinamik denklemlerin salınımlılığı ile ilgilenmiştir.

3.8. Teorem [15, Teorem 3.2]

$$\left(r_0(t)x^{\Delta}\right)^{\Delta} + c_0(t)x^{\sigma} = 0 \tag{3.18}$$

denklemi salınımsız ve $u(t)$, Eş. 3.18 denkleminin baskın çözümü olsun.

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{r_0(s)u(s)u^{\sigma}(s)} \left(\int_{t_0}^{s} g(\tau)u^{\sigma}(\tau)\Delta\tau \right) \Delta s \tag{3.19}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} H(t) = -\liminf_{t\to\infty} H(t) = \infty \tag{3.20}$$

ise

$$\left(r_0(t)x^{\Delta}\right)^{\Delta} + c_0(t)x^{\sigma} = g(t) \tag{3.21}$$

denklemi salınımlıdır.

2009 yılında Dosly ve Ünal tarafından [16] te ikinci basamaktan yarı lineer denklemler için baskın olmayan çözümleri incelenmiştir.

3.9. Teorem [16, Teorem 1] Yeterince büyük t için

$$u'(t) \neq 0$$

olacak şekilde u, Eş. 3.13 denkleminin pozitif baskın çözümü olsun.

$$R(t) := r(t)u^2(t)\left|u'(t)\right|^{p-2}$$

olmak üzere

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{R(s)} = \infty \tag{3.22}$$

ve

$$G(t) := r(t)u(t)\phi_P(u'(t))$$

olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} |G(t)| > 0 \tag{3.23}$$

ise C reel bir sabit olmak üzere ve $t \to \infty$ iken Eş. 3.13 denkleminin baskın olmayan çözümü

$$x(t) = u(t)\left(\int_{t_0}^{t} R^{-1}(s)ds\right)^{\frac{2}{p}} \left[C + O\left(\left(\int_{t_0}^{t} R^{-1}(s)ds\right)^{-1} \log \int_{t_0}^{t} R^{-1}(s)ds\right)\right] \tag{3.24}$$

asimptotik formülü şeklinde verilir.

2010 yılında Özbekler ve Zafer tarafından [14] te impulsif diferansiyel denklemler için baskın ve baskın olmayan çözümler incelenmiştir.

3.10. Teorem [14, Teorem 3.2] Bazı t_0 sabitleri için

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \int_{t_0}^{\infty} c(s)ds + \sum_{t_0 \le \theta_k} c_k = \infty \tag{3.25}$$

ise ikinci basamaktan lineer impulsif

$t \neq \theta_i$ için $\left(r(t)z'\right)' + c(t)z = 0$

(3.26)

$t=\theta_i$ için $\Delta r(t)z'+c_i z=0$

diferansiyel denklemleri salınımlıdır.

2011 yılında Özbekler ve diğerleri tarafından [4] te ikinci basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemler için salınımlılık kriterleri incelenmiştir.

3.11. Teorem [4, Teorem 2.1]

$$\left(r(t)x'\right)'+[p(t)-q(t)]x=0 \tag{3.27}$$

denklemi salınımsız olsun ve $v(t)$

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{r(s)v^2(s)}<\infty \tag{3.28}$$

eşitsizliği sağlayan pozitif ve baskın olmayan çözüm olsun.

$$H(t):=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(s)z^2(s)}\left(\int_{t_0}^{s}z(\tau)f(\tau)d\tau\right)ds, \tag{3.29}$$

$$N_1(t):=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(s)z^2(s)}\left(\int_{t_0}^{s}[\beta_0 p(\tau)+\gamma_0 q(\tau)]z(\tau)d\tau\right)ds \tag{3.30}$$

ve

$$N_2(t):=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(s)z^2(s)}\left(\int_{t_0}^{s}\left[\alpha_0 p(\tau)+\delta_0 q(\tau)\right]z(\tau)d\tau\right)ds \tag{3.31}$$

olmak üzere

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left\{H(t)-N_2(t)\right\}=-\underline{\lim}_{t\to\infty}\left\{H(t)+N_1(t)\right\}=\infty \tag{3.32}$$

ise $t \geq t_0$ için

$$\left(r(t)x'\right)' + p(t)F(x) - q(t)G(x) = f(t) \tag{3.33}$$

denklemi salınımlıdır.

2011 yılında ise Dosly ve Elbert tarafından [26] da verilen teorem Fisnarova ve Marik tarafından [28] de geliştirilmiştir.

3.12. Teorem [28, Teorem 4.1] Eş. 3.13 denklemi salınımsız, $q = \dfrac{p}{p-1}$ ve yeterince büyük t için $u'(t) \neq 0$ olmak üzere $u(t)$ pozitif bir çözümü olsun.

(i) $p \geq 2$ olsun. u baskın bir çözüm ise verilen her $\alpha \in [q, 2]$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{r^{\alpha-1}(s)u^{\alpha}(s)\left|u'(s)\right|^{(p-1)(\alpha-q)}} = \infty \tag{3.34}$$

sağlanır.

(ii) $p \in (1, 2]$ verilsin. Bazı $\alpha \in [2, q]$ için Eş. 3.29 sağlanıyorsa, u baskın çözümdür.

Konu hakkında fazla bilgi için [29-36] kaynak olarak alınabilir. Diferansiyel denklemin sonuçlarının asimptotik entegrasyonu $t \to \infty$ iken çözümlerin davranışı hakkında bilgi sağladığı gibi diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynar. Bu nedenle son on yılda bu konu oldukça dikkat çekmiştir. Bazı sonuçlar için Agarwal ve diğerleri [6], Agarwal ve diğerleri [37], Kiguradze ve Chanturia [38], Eastham [39], Coppel [40], Bellman [41] ve Caligo [42] bakılabilir.

Son zamanlarda Lipovan [43] da ikinci basamaktan daha genel lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için asimptotik gösterimi elde edildi. Mustafa ve Rogovchenko [44] de Lipovanın lineer omayan denklemler için elde ettiği sonucu genelleştirilmişlerdir. İlgili sonuçlar için [45-47] bakınız. Literatürde hemen tüm çalışmalarda yazarlar $x'' = 0$

denkleminden yararlanmaktadırlar. Diğerlerinden farklı sadece bir kaç sonuç vardır. Örneğin [48].

2013 yılında Ertem ve Zafer [1], ikinci basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemler için asimptotik integrasyon problemini göz önü almışlardır. Son bölümde bu çalışma daha detaylı incelenecektir.

4. BASKIN VE BASKIN OLMAYAN ÇÖZÜMLER

Birinci bölümdeki özelliklerden $t \geq t_1 > t_0$ için u Eş. 2.1 denkleminin pozitif baskın verilen bir çözümü ise v, baskın olmayan bir çözüm olmak üzere Eş. 2.1 denkleminin bir temel çözümler kümesi olarak

$$\left\{ u(t), v(t) = u(t) \int_{t_1}^{t} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} \right\} \tag{4.1}$$

alınabildiği açıktır. Ayrıca, $t \geq t_1 > t_0$ için v, Eş. 2.1 denkleminin pozitif baskın olmayan verilen bir çözümü ise Polya Faktorızasyonun ispatına bakıldığında u, baskın çözüm olmak üzere Eş. 2.1 denkleminin bir temel çözümler kümesi de

$$\left\{ u(t) = v(t) \int_{t}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)}, v(t) \right\}$$

(4.2)

şeklinde ortaya çıkar.

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = at + b + o(1) \tag{4.3}$$

de görünen $x(t) = at + b$, $x'' = 0$ lineer denklemin çözümüdür ve bu çözümü $u(t) = 1$ ve $v(t) = t$ sırasıyla baskın ve baskın olmayan çözümler olmak üzere $x(t) = av(t) + bu(t)$ formunda yazılabilir. Aslında, bu tespit Eş. 2.1 lineer denkleminin baskın ve baskın olmayan çözümleri ile ilgili olarak $t \geq t_0$ için

$$\left(p(t)x' \right)' + q(t)x = f(t, x) \tag{4.4}$$

denklemi için asimptotik integrasyon sorununu incelemek için ilham kaynağı olmuştur. Bu tezde tanıtılan metot Ertem ve Zafer [1] tarafından elde edilen literatürde diğer benzer çalışmaları genelleştirmede ve geliştirmede kullanılabilir.

4.1. Temel Sonuçlar

Eş. 2.1 lineer denklemi pozitif bir çözüme sahip olsun. Ayrıca, Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 temel çözümler kümelerinde tanımlanan baskın ve baskın olmayan çözümler kümesi $\{u,v\}$ ile tanımlansın. Çözümlerin asimptotik integrasyonu ile ilgili dört teoremden bahsedilip ispatları verilecektir. Eş. 4.4 denkleminin özel durumu olan $t \geq t_0$ iken

$$x'' = f(t,x) \tag{4.5}$$

dir.

4.1.1. Teorem. u ve v, Eş. 2.1 denkleminin Eş. 4.1 temel çözümler kümesinde verilen baskın ve baskın olmayan çözümleri olsun. Bazı $t \geq T > t_1$ için

$$|f(t,x)| \leq h_1(t)\, g\left(\frac{|x|}{v(t)}\right) + h_2(t) \tag{4.6}$$

olacak şekilde $g \in C([0,\infty),[0,\infty))$ ve h_1, $h_2 \in C([t_1,\infty),[0,\infty))$ var olsun. Eğer $i = 1,2$ için

$$\int_T^\infty v(s)h_i(s)\,ds < \infty \tag{4.7}$$

ise her verilen $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = av(t) + bu(t) + o(u(t)) \tag{4.8}$$

olacak şekilde Eş. 4.4 denkleminin bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat. $a,b \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$y(t) := x(t) - av(t)$$

ve

$$M := \max_{0 \le x \le |a|+|b|+1} |g(x)| \tag{4.9}$$

tanımlansın. Eş. 4.4 denkleminden

$$\left(p(t)y'\right)' + q(t)y = f\left(t, y + av(t)\right) \tag{4.10}$$

elde edilir. Böylece

$t \to \infty$ iken $y(t) = bu(t) + o\left(u(t)\right)$

olacak şekilde Eş. 4.10 denkleminin bir $y(t)$ çözümü vardır.

(i) ve Eş. 4.7 den $u(t) \le v(t)$,

$$\int_{T_1}^{\infty} v(s)h_1(s)ds < \frac{1}{2M} \text{ ve } \int_{T_1}^{\infty} v(s)h_2(s)ds < \frac{1}{2} \tag{4.11}$$

olacak şekilde yeterince büyük $T_1 > T$ seçilebilir.

$$Y = \left\{ y \in C\left([T_1, \infty), \mathbb{R}\right) \;\middle|\; \frac{|y(t)|}{v(t)} \le M_y, t \ge T_1 \right\}$$

lineer uzayı göz önüne alınsın. Y nın

$$\|y\| = \sup_{T_1 \le t < \infty} \frac{|y(t)|}{v(t)}$$

normuna sahip bir Banach uzayı olup olmadığını kontrol etmek kolaydır. K,

$$K := \left\{ y \in Y \;\middle|\; \|y - bu\| \le 1 \right\}$$

ile tanımlanan Y nin kapalı, sınırlı, konveks ve boş olmayan bir alt kümesi olsun. $t \geq T_1$ için

$$(Fy)(t) = bu(t) + u(t)\int_t^\infty f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)u(\tau)\int_t^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau$$

ile bir $F : K \to Y$ operatörü tanımlansın. F in sabit bir noktaya sahip olduğunu göstermek için Schauder sabit nokta teoremi kullanılacaktır. F in her bir sabit noktası Eş. 4.10 denkleminin bir çözümü olup olmadığını görmek kolaydır.

$F : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$: Her bir $y \in K$ için Eş. 4.1, Eş. 4.6 ve Eş. 4.11 den

$$\frac{\left|(Fy)(t) - bu(t)\right|}{v(t)} \leq \frac{\left|(Fy)(t) - bu(t)\right|}{u(t)} \leq \int_t^\infty \left| f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)\right| u(\tau)\int_t^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau$$

$$\leq \int_t^\infty \left| f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)\right| u(\tau)\int_{t_1}^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau$$

$$\leq M\int_t^\infty v(\tau)h_1(\tau)d\tau + \int_t^\infty v(\tau)h_2(\tau)d\tau$$

$$\leq M\int_{T_1}^\infty v(\tau)h_1(\tau)d\tau + \int_{T_1}^\infty v(\tau)h_2(\tau)d\tau \leq 1$$

elde edilir. Supremum alınırsa $FK \subset K$ olduğu görülür.

F süreklidir: $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset K$, $y \in K$ ya yakınsak keyfi bir dizi olsun. Herhangi bir $n \in N$ için $G_n(\tau) = \left| f\left(\tau, y_n(\tau) + av(\tau)\right) - f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)\right|$ olmak üzere

$$\frac{\left|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)\right|}{v(t)} \leq \frac{\left|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)\right|}{u(t)} \leq \int_t^\infty G_n(\tau)u(\tau)\int_t^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau \tag{4.12}$$

elde edilir.

Eş. 4.1 ve Eş. 4.6 göz önünde bulundurularak Lebesgue baskın yakınsama teoremi uygulanırsa $n \to \infty$ iken $Fy_n \to Fy$ ve

$$\int_t^\infty G_n(\tau)u(\tau)\int_t^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau \le \int_t^\infty G_n(\tau)u(\tau)\int_{t_1}^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}d\tau = \int_t^\infty G_n(\tau)v(\tau)d\tau$$

$$\le \int_{T_1}^\infty 2\big(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\big)v(\tau)d\tau$$

elde edilir.

F tamamen süreklidir: $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ keyfi bir dizi olsun. $k \to \infty$ iken $Fy_{n_k} \to w$ olacak şekilde $w \in K$ ve bir $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ alt dizisinin var olduklarını göstermek gerekir. Bu tür bir w fonksiyonunun varlığını göstermek için Lemma 2.5 kullanılacaktır.

Şimdi

$$f_n(\tau) := f\left(\tau, y_n(\tau)+av(\tau)\right)u(\tau)\int_t^\tau \frac{ds}{p(s)u^2(s)}$$

olmak üzere

$$(Fy_n)(t) = bu(t) + u(t)\int_t^\infty f_n(\tau)d\tau$$

yazılsın.

$\{Fy_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ olduğundan $n \ge 1$ için $\| f_n\|_{L_1([T_1,\infty))} \le 1$ elde edilir. Yani, Lemma 2.5 in (a) şartı sağlanır. (b) nin de sağlandığını göstermek için ilk olarak

$$(\tau_h f)(\tau) = f(\tau + h)$$

tanımlansın. Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 i kullanarak

$$\int_{T_1}^{\infty}\left|(\tau_h f_n)(\tau)-f_n(\tau)\right|d\tau \le \int_{T_1}^{\infty}\left|f_n(\tau+h)\right|d\tau+\int_{T_1}^{\infty}\left|f_n(\tau)\right|d\tau$$

$$=\int_{T_1+h}^{\infty}\left|f_n(\tau)\right|d\tau+\int_{T_1}^{\infty}\left|f_n(\tau)\right|d\tau$$

$$\le \int_{T_1}^{\infty}2\left|f_n(\tau)\right|d\tau$$

$$\le \int_{T_1}^{\infty}2\big(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\big)v(\tau)\,d\tau<\infty$$

elde edilir. Ayrıca

$h\to 0$ iken $\left\|\tau_h f_n - f_n\right\|_{L_1([T_1,\infty))}\to 0$

elde edilir.

Şimdi Lemma 2.5 in bir uygulaması, bazı $z\in L_1\big([T_1,\infty)\big)$ için $k\to\infty$ iken $\left\|f_{n_k}-z\right\|_{L_1([T_1,\infty))}\to 0$ olacak şekilde bir $\left\{f_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisinin var olduğunu gösterir.

Son olarak, eğer

$$w(t):=bu(t)+u(t)\int_{t}^{\infty}z(\tau)\,d\tau$$

tanımlanırsa

$$\frac{\left|(Fy_n)(t)-w(t)\right|}{v(t)}\le\int_{T_1}^{\infty}\left|f_{n_k}(\tau)-z(\tau)\right|d\tau$$

dır. Supremum alarak ve Lebesgue baskın yakınsama teoremini uygulayarak F in tamamen sürekli olduğu elde edilir.

Schauder sabit nokta teoreminden F operatörünün bir sabit $y \in K$ noktasına sahip olduğu gösterilir. Yani,

$$y(t) = bu(t) + u(t)\int_t^{\infty} f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)u(\tau)\int_t^{\tau} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} d\tau$$

dır.

Eş. 4.8 asimptotik gösteriminin sağlandığını göstermek için Eş. 4.1 ve Eş. 4.6 kullanılarak

$$\left|y(t) - bu(t)\right| \le u(t)\int_t^{\infty} \left| f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)\right| u(\tau)\int_t^{\tau} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} d\tau$$

$$\le u(t)\int_t^{\infty} \left| f\left(\tau, y(\tau) + av(\tau)\right)\right| u(\tau)\int_{t_1}^{\tau} \frac{ds}{p(s)u^2(s)} d\tau$$

$$\le u(t)\int_t^{\infty} v(\tau)\left(Mh_1(\tau) + h_2(\tau)\right) d\tau ds$$

elde edilir. $u(t)$ e bölerek limit alınırsa

$$t \to \infty \text{ iken } y(t) - bu(t) = o\left(u(t)\right) \tag{4.13}$$

olduğu görülür.

$$x(t) = y(t) + av(t) \tag{4.14}$$

göz önünde bulundurarak ve v nin Eş. 2.1 denkleminin bir çözümü olduğu gerçeği kullanarak

$$Lx = Ly + aLv = f(t, y + av(t)) = f(t, x)$$

elde edilir. Yani, x, Eş. 2.1 denkleminin bir çözümüdür. Eş. 4.13 ve Eş. 4.14 kullanılarak Eş. 4.8 asimptotik gösterimi elde edilir.

4.1.2. Teorem. u ve v, Eş. 2.1 denkleminin Eş. 4.2 temel çözümler kümesinde verilen baskın ve baskın olmayan çözümleri olsun. Eğer Eş. 4.6 ya ek olarak $i=1,2$ için

$$\int_T^\infty u(s)h_i(s)ds<\infty$$

ve $i=1,2$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{u(t)}{v(t)}\int_T^t v(s)h_i(s)ds=0$$

olursa verilen herhangi bir $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$t\to\infty \text{ iken } x(t)=av(t)+bu(t)+o(v(t)) \tag{4.15}$$

olacak şekilde Eş. 4.4 denkleminin bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat. $a,b\in\mathbb{R}$ verilsin

$$y(t):=x(t)-bu(t) \tag{4.16}$$

tanımlansın. Böylece Eş. 4.4 denklemi

$$\left(p(t)y'\right)'+q(t)y=f\left(t,y+bu(t)\right) \tag{4.17}$$

olur. Şimdi Eş. 4.17 denklemin

$$t\to\infty \text{ iken } y(t)=av(t)+o(v(t))$$

olacak şekilde bir $y(t)$ çözümü olduğunu göstermek gerekir. M, Eş. 4.9 deki gibi olsun. Genelliği bozmaksızın

$$\int_{T_1}^{\infty} u(s)h_1(s)ds < \frac{1}{2M} \text{ ve } \int_{T_1}^{\infty} u(s)h_2(s)ds < \frac{1}{2} \tag{4.18}$$

ve $t \geq T_1$ için $v(t) \geq u(t) > 0$ olacak şekilde yeterince büyük T_1 seçilebilir.

$$Y = \left\{ y \in C\left(\left[T_1, \infty\right), \mathbb{R}\right) \mid \frac{|y(t)|}{v(t)} \leq M_y, t \geq T_1 \right\}$$

lineer uzayı göz önüne alınsın. Y,

$$\|y\| = \sup_{T_1 \leq t < \infty} \frac{|y(t)|}{v(t)}$$

ile tanımlanan norma sahip bir Banach uzayıdır.

$K := \left\{ y \in Y \mid \|y - av\| \leq 1 \right\}$, Y nin

kapalı, sınırlı konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. $t \geq T_1$ için

$$(Fy)(t) = av(t) - u(t)\int_{T_1}^{t} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)v(\tau)d\tau - v(t)\int_{t}^{\infty} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)u(\tau)d\tau$$

ile bir $F: K \to Y$ operatörü tanımlansın. F in her bir sabit noktası Eş. 4.17 denkleminin bir çözümü olduğunu görmek kolaydır. F in bir sabit noktası olduğunu görmek için tekrar Schauder sabit nokta teoremi kullanılır.

$F: K \to K$: Her bir $y \in K$ için Eş. 4.2, Eş. 4.6 ve Eş. 4.18 den

$$\frac{|(Fy)(t) - av(t)|}{v(t)} = \left| -\int_{t}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} \int_{T_1}^{t} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)v(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)u(\tau)d\tau \right|$$

$$\leq \int_{T_1}^{t} \left| f\left(\tau, y(\tau)+bu(\tau)\right) \right| v(\tau) \int_{t}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} d\tau$$

$$+\int_{t}^{\infty} \left| f\left(\tau, y(\tau)+bu(\tau)\right) \right| u(\tau)\, d\tau$$

$$\leq \int_{T_1}^{\infty} \left| f\left(\tau, y(\tau)+bu(\tau)\right) \right| v(\tau) \int_{T}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} d\tau$$

$$\leq M \int_{T_1}^{\infty} u(\tau) h_1(\tau)\, d\tau + \int_{T_1}^{\infty} u(\tau) h_2(\tau)\, d\tau$$

$$\leq 1$$

elde edilir. Sol tarafa supremum alınırsa $FK \subset K$ olduğu görülür.

F süreklidir: $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, $y \in K$ ya yakınsak keyfi bir dizi olsun. F in sürekli olduğunu görmek için $n \to \infty$ iken $Fy_n \to Fy$ olduğunu göstermek gerekir. Her hangi bir $n \in N$ için Eş. 4.2 ve Eş. 4.6 de göründüğünden $g_n(\tau) = \left| f\left(\tau, y_n(\tau)+bu(\tau)\right) - f\left(\tau, y(\tau)+bu(\tau)\right) \right|$ olmak üzere

$$\frac{\left| (Fy_n)(t) - (Fy)(t) \right|}{v(t)} \leq \int_{t}^{\infty} \frac{ds}{p(s)v^2(s)} \int_{T_1}^{t} g_n(\tau) v(\tau)\, d\tau + \int_{t}^{\infty} g_n(\tau) u(\tau)\, d\tau$$

$$\leq \int_{T_1}^{\infty} g_n(\tau) u(\tau)\, d\tau$$

$$\leq 2M \int_{T_1}^{\infty} h_1(\tau) u(\tau)\, d\tau + 2\int_{T_1}^{\infty} h_1(\tau) u(\tau)\, d\tau$$

elde edilir.

Lebesgue baskın yakınsama teoremi uygulanırsa F in sürekliliği elde edilir.

$$(Fy_n)(t)=av(t)-v(t)\int_{T_1}^{t} f\left(\tau, y_n(\tau)+bu(\tau)\right)v(\tau)\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{p(s)v^2(s)}d\tau - v(t)\int_{t}^{\infty} f\left(\tau, y_n(\tau)+bu(\tau)\right)u(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$f_n^1(\tau):= f\left(\tau, y_n(\tau)+bu(\tau)\right)v(\tau)\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{p(s)v^2(s)}$$

yazılsın. $\{Fy_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ olduğundan her n için $\left\|f_n^1\right\|_{L_1([T_1,\infty))}\le 1$ elde edilir.

$(\tau_h f)(x)=f(x+h)$ olmak üzere

$$\int_{T_1}^{\infty}\left|f_n^1(\tau+h)-f_n^1(\tau)\right|d\tau \le \int_{T_1}^{\infty}\left|f_n^1(\tau+h)\right|d\tau+\int_{T_1}^{\infty}\left|f_n^1(\tau)\right|d\tau$$

$$\le \int_{T_1}^{\infty}\left|f_n^1(\tau)\right|d\tau+\int_{T_1}^{\infty}\left|f_n^1(\tau)\right|d\tau$$

$$\le \int_{T_1}^{\infty}2\left|f_n^1(\tau)\right|d\tau$$

$$\le 2M\int_{T_1}^{\infty}h_1(\tau)u(\tau)d\tau+2\int_{T_1}^{\infty}h_2(\tau)u(\tau)d\tau$$

olduğu da tahmin edilir.

Lebesgue baskın yakınsama teoremini kullanarak

$h\to 0$ iken $\left\|\tau_h f_n^1 - f_n^1\right\|_{L_1([T_1,\infty))}\to 0$

elde edilir.

Dolayısıyla Riesz teoremine göre bir $\left\{ f_{n_k}^1 \right\}_{n=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Böylece bazı $w^1 \in L_1\left(\left[T_1,\infty\right)\right)$ için

$$k \to \infty \text{ iken } \left\| f_{n_k}^1 - w^1 \right\|_{L_1\left(\left[T_1,\infty\right)\right)} \to 0$$

dir.

Şimdi $\left\{ y_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınırsa ve $\left\{ f_{n_k}^2 \right\}_{k=1}^{\infty}$ dizisini

$$f_{n_k}^2\left(\tau\right) := f\left(\tau, y_{n_k}\left(\tau\right) + bu\left(\tau\right)\right) v\left(\tau\right) \int_T^{\infty} \frac{ds}{p\left(s\right) v^2\left(s\right)}$$

ile tanımlanır. Yukardaki gibi benzer tahminleri ile bir $\left\{ f_{n_{k_1}}^2 \right\}_{l=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Böylece bazı $w^2 \in L_1\left(\left[T_1,\infty\right)\right)$ için

$$k \to \infty \text{ iken } \left\| f_{n_{k_1}}^2 - w^2 \right\|_{L_1\left(\left[T_{1,\infty}\right)\right)} \to 0$$

dir.

$$z\left(t\right) := av\left(t\right) - v\left(t\right) \int_{T_1}^{t} w^1\left(\tau\right) d\tau - v\left(\tau\right) \int_t^{\infty} w^2\left(\tau\right) d\tau$$

tanımlansın. Böylece

$$\frac{\left|\left(Fy_{n_{k_1}}\right)\left(t\right) - z\left(t\right)\right|}{v\left(t\right)} \le \int_{T_1}^{\infty} \left| f_{n_{k_1}}^1\left(\tau\right) - w^1\left(\tau\right) \right| d\tau + \int_{T_1}^{\infty} \left| f_{n_{k_1}}^2\left(\tau\right) - w^2\left(\tau\right) \right| d\tau.$$

elde edilir.

Sol tarafın supremumun alarak ve Lebesque baskın yakınsama teoremini uygulayarak F in tamamen sürekli olduğu elde edilir. Schauder sabit nokta teoremini uygulayarak F in bir $y \in K$ sabit noktası olduğunu görünür. Yani, bir $y \in K$ böylece $t \geq T_1$ için

$$y(t) = av(t) - u(t)\int_{T_1}^{t} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)v(\tau)\,d\tau - v(\tau)\int_{t}^{\infty} f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)u(\tau)\,d\tau$$

dir. Son olarak, Eş. 4.15 denkleminin sağlandığı gösterilecektir. Eş. 4.2 ve Eş. 4.6 dan

$$\left|y(t) - av(t)\right| \leq u(t)\int_{T_1}^{t}\left| f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)\right| v(\tau)\,d\tau + v(t)\int_{t}^{\infty}\left| f\left(\tau, y(\tau) + bu(\tau)\right)\right| u(\tau)\,d\tau$$

$$\leq u(t)\int_{T_1}^{t}\left(Mh_1(\tau) + h_2(\tau)\right)v(\tau)\,d\tau + v(t)\int_{t}^{\infty}\left(Mh_1(\tau) + h_2(\tau)\right)u(\tau)\,d\tau$$

elde edilir. $v(t)$ e bölerek ve Eş. 4.15 kullanarak

$$t \to \infty \text{ iken } y(t) - av(t) = o\left(v(t)\right) \tag{4.19}$$

olduğunu kolaylıkla görülür.

$$x(t) = y(t) + bu(t) \tag{4.20}$$

i göz önünde bulundurarak ve u nun Eş. 2.1 denkleminin bir çözümü olduğu gerçeğinden

$$Lx = Ly + bLu = f\left(t, y + bu\right) = f\left(t, x\right)$$

elde edilir. Yani, x, Eş. 2.1 denkleminin bir çözümüdür. Eş. 4.19 ve Eş. 4.20 kullanılarak Eş. 4.15 asimptotik gösterimi elde edilir.

4.1.3. Teorem. u ve v, Eş. 2.1 denkleminin Eş. 4.1 temel çözümler kümesinde verilen baskın ve baskın olmayan çözümleri olsun. Eş. 4.6 nin sağlandığını ve $t \geq T$, bazı $k \in C\left(\left[t_1, \infty\right), \left[0, \infty\right)\right)$ için

$$\left|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right| \le \frac{k(t)}{v(t)}|x_1-x_2| \tag{4.21}$$

olduğu kabul edilsin. Eğer

$$\int_T^\infty u(s)k(s)ds < \infty \tag{4.22}$$

ve $\mu \in (0,1)$ için

$$t \to \infty \text{ iken } \int_T^t \beta(s)ds = o\left(\left(v(t)\right)^\mu\right) \tag{4.23}$$

sağlanacak şekilde $\beta \in C\left([t_1,\infty),[0,\infty)\right)$ olmak üzere $t \ge T$ ve $i=1,2$ için

$$\frac{1}{p(t)u^2(t)}\int_t^\infty u(s)h_i(s)ds \le \beta(t) \tag{4.24}$$

ise verilen herhangi bir $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = av(t)+bu(t)+o\left(u(t)\left(v(t)\right)^\mu\right) \tag{4.25}$$

olacak şekilde Eş. 4.4 denkleminin bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat. M , Eş. 4.9 deki gibi, Eş. 4.18 sağlanacak şekilde T_1 yeterince büyük ve

$$\int_{T_1}^\infty u(s)k(s)ds < \mu$$

olsun.

$$X=\left\{x\in C\left(\left[T_1,\infty\right),\mathbb{R}\right)\ \Big|\ \frac{\left|x(t)-av(t)-bu(t)\right|}{v(t)}\le 1, \forall\, \mathrm{t}\ge \mathrm{T}_1\right\}$$

fonksiyonlar uzayını göz önüne alarak $x_1,x_2\in X$ için

$$d\left(x_1,x_2\right)=\sup_{t\ge T_1}\frac{1}{v(t)}\left|x_1(t)-x_2(t)\right|$$

metriğine sahip X in bir tam metrik uzayı olduğunu görülebilir.

$$(Fx)(t)=-u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\,f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau ds+av(t)+bu(t)$$

ile X üzerinde bir F operatörü tanımlansın. F in teoremin koşullarından iyi tanımlı olduğuna dikkat edilmelidir. F in sabit bir noktaya sahip olduğunu göstermek için Banach daralma prensibi kullanılacaktır. $x\in X$ olsun. Eş. 4.1 ve Eş. 4.6 den

$$\left|(Fx)(t)-av(t)-bu(t)\right|\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\left|f\left(\tau,x(\tau)\right)\right|d\tau ds$$

$$\le u(\tau)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{T_1}^{\infty}u(\tau)\left|f\left(\tau,x(\tau)\right)\right|d\tau ds$$

$$\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{T_1}^{\infty}u(\tau)\left(h_1(\tau)g\left(\frac{\left|x(\tau)\right|}{v(\tau)}\right)+h_2(\tau)\right)d\tau ds$$

$$\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{T_1}^{\infty}u(\tau)\left(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\right)d\tau ds$$

$$\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}ds$$

$$\le v(t)$$

olduğu görülür. Yani, $FX \subset X$ dir.

$x_1, x_2 \in X$ olsun. Eş. 4.21 ve Eş. 4.22 i kullanarak

$$\left|(Fx_1)(t)-(Fx_2)(t)\right| \le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\left|f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_2(\tau))\right|d\tau ds$$

$$\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\frac{k(\tau)}{v(\tau)}\left|x_1(\tau)-x_2(\tau)\right|d\tau ds$$

$$\le d(x_1,x_2)u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)k(\tau)d\tau ds$$

$$\le d(x_1,x_2)u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{T_1}^{\infty}u(\tau)k(\tau)d\tau ds$$

$$\le \mu d(x_1,x_2)v(t)$$

elde edilir. Buradan

$$d(Fx_1,Fx_2) \le \mu d(x_1,x_2)$$

bulunur. Yani, F bir daralmadır. Banach daralma prensibine göre F bir tek x sabit noktasına sahiptir ve bu sabit nokta Eş. 4.4 denkleminin çözümüdür. Eş. 4.6, Eş. 4.22 ve Eş. 4.23 den

$$\left|x(t)-av(t)-bu(t)\right| \le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau ds$$

$$\le u(t)\int_{T_1}^{t}\frac{1}{p(s)u^2(s)}\int_{s}^{\infty}u(\tau)\left(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\right)d\tau ds$$

$$\leq (M+1)u(t)\int_{T_1}^{t} \beta(s)ds$$

elde edilir. Dolayısıyla Eş. 4.25 sağlanır.

4.1.4. Teorem. u ve v, Eş. 2.1 denkleminin Eş. 4.2 temel çözümler kümesinde verilen baskın ve baskın olmayan çözümleri olsun. Eş. 4.6 ve Eş. 4.21 sağlansın ve ek olarak

$$\int_{T}^{\infty} v(s)k(s)ds < \infty \tag{4.26}$$

ve $\mu \in (0,1)$,

$$t \to \infty \text{ iken } \int_{t}^{\infty} \beta(s)ds = o\left(\left(u(t)\right)^{\mu}\right) \tag{4.27}$$

olacak şekilde $\beta \in C\left(\left[t_1,\infty\right),\left[0,\infty\right)\right)$ olmak üzere $t \geq T$, $i = 1,2$ için

$$\frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_{t}^{\infty} v(s)h_i(s)ds \leq \beta(t) \tag{4.28}$$

ise verilen herhangi bir $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = av(t) + bu(t) + o\left(v(t)\left(u(t)\right)^{\mu}\right) \tag{4.29}$$

olacak şekilde Eş. 4.4 denkleminin bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat. M, Eş. 4.9 deki gibi, Eş. 4.11 sağlansın ve

$$\int_{T}^{\infty} v(s)k(s)ds < \mu$$

olacak şekilde T_1 yeterince büyük olsun. Ayrıca, bir önceki teoremin ispatındaki aynı (X,d) metrik uzayı alınsın.

$$(Fy)(t)=v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\, f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau ds+av(t)+bu(t)$$

ile X üzerinde bir F operatörünü tanımlansın. F in teoremin koşullarından iyi tanımlı olduğu görülür. F in sabit bir noktaya sahip olduğunu göstermek için Banach sabit nokta teoremi kullanılır. $x\in X$ olsun. Eş. 4.2 ve Eş. 4.6 den

$$\begin{aligned}
\left|(Fx)(t)-av(t)-bu(t)\right| &\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\left|f\left(\tau,x(\tau)\right)\right|d\tau ds \\
&\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_{T_1}^\infty v(\tau)\left|f\left(\tau,x(\tau)\right)\right|d\tau ds \\
&\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_{T_1}^\infty v(\tau)\left(h_1(\tau)g\left(\frac{|x(\tau)|}{v(\tau)}\right)+h_2(\tau)\right)d\tau ds \\
&\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_{T_1}^\infty v(\tau)\left(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\right)d\tau ds \\
&\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}ds \\
&\le v(t)
\end{aligned}$$

olduğunu görülür. Yani, $FX\subset X$ dir.

$x_1,x_2\in X$ olsun. Eş. 4.21 ve Eş. 4.26 i kullanarak

$$\left|(Fx_1)(t)-(Fx_2)(t)\right|\le v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\left|f\left(\tau,x_1(\tau)\right)-f\left(\tau,x_2(\tau)\right)\right|d\tau ds$$

$$\leq v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\frac{k(\tau)}{v(\tau)}\left|x_1(\tau)-x_2(\tau)\right|d\tau ds$$

$$\leq d(x_1,x_2)v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)k(\tau)d\tau ds$$

$$\leq d(x_1,x_2)v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_{T_1}^\infty v(\tau)k(\tau)d\tau ds$$

$$\leq \mu d(x_1,x_2)v(t)$$

$$\leq v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}ds$$

$$\leq \mu d(x_1,x_2)v(t)$$

elde edilir. Buradan

$$d(Fx_1,Fx_2)\leq \mu d(x_1,x_2)$$

bulunur. Yani, F bir daralmadır. Banach sabit nokta teoremi ile F bir tek sabit x notasına sahiptir ve bu sabit nokta Eş. 4.4 denkleminin bir çözümü olduğu kolayca görülür. Son olarak Eş. 4.6, Eş. 4.27 ve Eş. 4.28 den

$$\left|x(t)-av(t)-bu(t)\right|\leq v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\left|f(\tau,x(\tau))\right|d\tau ds$$

$$\leq v(t)\int_t^\infty \frac{1}{p(s)v^2(s)}\int_s^\infty v(\tau)\left(Mh_1(\tau)+h_2(\tau)\right)d\tau ds$$

$$\leq (M+1)v(t)\int_t^\infty \beta(s)ds$$

elde edilir. Dolayısıyla Eş. 4.29 sağlanır.

4.2. Örnekler

Bu bölümde sonuçları açıklamak için üç örnek verilecektir. Baskın ve baskın olmayan çözümlerin hesaplaması kolay olan örnekler verildi. Bilinen baskın ve baskın olmayan çözümlere sahip çok spesifik örnekler okuyucuya bırakılmıştır.

4.2.1. *Örnek.* $t \geq 1$ için lineer olmayan

$$(tx')' - \frac{1}{t}x = \frac{x^3 \sin x}{t^4\left(1+x^2\right)} + te^{-t} \tag{4.30}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. $t \geq 1$ için karşılık gelen lineer denklem

$$(tx')' - \frac{1}{t}x = 0$$

dir. $t_1 = 1$ ve $T = 2$ olsun.

$$p(t) = t\,, \quad f(t,x) = \frac{x^3 \sin x}{t^4\left(1+x^2\right)} + te^{-t}, \quad u(t) = \frac{1}{2t} \text{ ve } v(t) = t - \frac{1}{t}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$h_1(t) = \frac{1}{t^3}, \quad h_2(t) = te^{-t} \text{ ve } g(x) = x$$

alınırsa $t \geq 2$ için

$$\left|f(t,x)\right| \leq \frac{|x|}{t^4} + te^{-t} \leq h_1(t)\, g\left(\frac{|x|}{v(t)}\right) + h_2(t),$$

$$\int_2^{\infty} v(s)h_1(s)ds = \int_2^{\infty}\left(s-\frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^3}ds = \frac{11}{24} < \infty$$

ve

$$\int_2^{\infty} v(s)h_2(s)ds = \int_2^{\infty}\left(s-\frac{1}{s}\right)se^{-s}ds = 7e^{-2} < \infty$$

olduğu açıktır. Teorem 4.1.1 in tüm şartları sağlandığından verilen herhangi bir a,b reel sayılar için Eş. 4.30 denkleminin

$$t\to\infty \text{ iken } x(t) = a\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{b}{2t}+o\left(\frac{1}{2t}\right)$$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.2.2. *Örnek.* $t \geq 1$ için lineer olmayan

$$\left(t^2x'\right)' - 2x = \frac{\ln t}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+t^2} \tag{4.31}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. $t \geq 1$ için karşılık gelen lineer denklem

$$\left(t^2x'\right)' - 2x = 0$$

dir. $t_1 = T = 1$ olsun.

$$p(t) = t^2, \quad f(t,x) = \frac{\ln t}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+t^2}, \quad u(t) = \frac{1}{3t^2} \text{ ve } v(t) = t$$

olduğuna dikkat edilsin.

$$h_1(t) = 1, \quad h_2(t) = \ln t \text{ ve } g(x) = x^2$$

alınırsa

$$\left|f(t,x)\right| \le \frac{x^2}{t^2} + \ln t = h_1(t)\,g\left(\frac{|x|}{t}\right) + h_2(t)$$

ve $i = 1,2$ için

$$\int_1^\infty u(s)h_i(s)\,ds = \frac{1}{3} < \infty\,,\ \ \frac{u(t)}{v(t)}\int_1^t u(s)h_i(s)\,ds \le \frac{1}{t}\,,$$

olduğu görülür. Teorem 4.1.2 nin tüm şartları sağlandığından verilen herhangi bir a,b reel sayılar için Eş. 4.31 denkleminin

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = at + \frac{b}{3t^2} + o(t)$$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.2.3. *Örnek.* $t \ge 1$ ve $v \le -\frac{5}{2}$ için lineer olmayan

$$\left(t\sqrt{t}x'\right)' - \frac{1}{2\sqrt{t}}x = \frac{x^3}{t^3\left(t+x^2\right)} + t^v$$

(4.32)

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. $t_1 = 1$ ve $T = 2$ olsun. Böylece

$$p(t) = t\sqrt{t}\,,\quad f(t,x) = \frac{x^3}{t^3\left(t+x^2\right)}\,,\quad u(t) = \frac{2}{3t} \text{ ve } v(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{t}$$

dir.

$$h_1(t) = \frac{1}{t^3}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right),\ h_2(t) = t^v\,,\ g(x) = x\,,\ k(t) = \frac{3}{2}h_1(t) \text{ ve } \beta(t) = \frac{1}{t^2}$$

alınırsa $t \geq 2$ için

$$\left|f(t,x)\right| \leq \frac{|x|}{t^3} + t^{\nu} = h_1(t)\, g\left(\frac{|x|}{v(t)}\right) + h_2(t),$$

$$\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \leq \frac{3}{2t^3}|x_1 - x_2| = \frac{k(t)}{v(t)}|x_1 - x_2|,$$

$$\int_2^{\infty} u(s)k(s)\,ds < 1,\ \frac{1}{p(t)u^2(t)}\int_2^{\infty} u(s)h_i(s)\,ds \leq \frac{1}{t^2}$$

ve $\mu \in (0,1)$ için

$$t \to \infty \text{ iken } \int_2^{t} \frac{ds}{s^2} = o\left(\left(v(t)\right)^{\mu}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 den verilen herhangi bir a,b reel sayılar için Eş. 4.32 denkleminin

$$t \to \infty \text{ iken } x(t) = a\left(\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right) + b\frac{3}{2t} + o\left(\frac{3}{2t}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{t}\right)^{\mu}\right)$$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.3 Sonuçlar. Şimdi de teoremlerle sonuçlar verilecektir.

4.3.1. Sonuç. $i = 1,2$ için

$$\int_1^{\infty} s h_i(s)\,ds < \infty \tag{4.33}$$

olacak şekilde ve bazı sürekli h_1 ve h_2 fonksiyonları için

$$\left| f(t,x) \right| \leq h_1(t)\, g\left(\frac{|x|}{t} \right) + h_2(t) \tag{4.34}$$

sağlansın. Dolaysıyla verilen herhangi $a,b \in \mathbb{R}$ ve $t \geq 1$ için

$$x'' = f(t,x) \tag{4.35}$$

denkleminin

$t \to \infty$ iken $x(t) = at + b + o(1)$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.3.2. Sonuç. Eş. 4.34 sağlansın. $i = 1,2$ için

$$\int_1^\infty h_i(s)\,ds < \infty \text{ ve } \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_T^t s h_i(s)\,ds = 0$$

ise dolaysıyla verilen herhangi $a,b \in \mathbb{R}$ için Eş. 4.35 denkleminin

$t \to \infty$ iken $x(t) = at + b + o(t)$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.3.3. Sonuç. Eş. 4.34 sağlansın ve $t \geq 1$ için $k \in C([1,\infty),[0,\infty))$ olmak üzere

$$\left| f(t,x_1) - f(t,x_2) \right| \leq \frac{k(t)}{t} |x_1 - x_2| \tag{4.36}$$

olsun. Eğer $\int_1^\infty k(s)\,ds < \infty$ ve $\mu \in (0,1)$ için

$t \to \infty$ iken $\int_1^t \beta(s)\,ds = o(t^{\mu})$

olacak şekilde $\beta \in C([1,\infty),[0,\infty))$ olmak üzere $t \ge 1$ ve $i = 1,2$ için

$$\int_t^{\infty} h_i(s)\,ds \le \beta(t)$$

ise dolayısıyla verilen herhangi bir $a,b \in \mathbb{R}$ için Eş. 4.35 denkleminin

$t \to \infty$ iken $x(t) = at + b + o(t^{\mu})$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

4.3.4. Sonuç. Eş. 4.34 ve Eş. 4.36 sağlansın. Eğer

$\int_1^{\infty} sk(s)\,ds < \infty$ ve $t \to \infty$ için $\int_t^{\infty} \beta(s)ds = o(1)$

olacak şekilde $\beta \in C([1,\infty),[0,\infty))$ olmak üzere $t \ge 1$ ve $i = 1,2$ için

$$\frac{1}{t^2}\int_t^{\infty} sh_i(s)\,ds \le \beta(t)$$

ise dolayısıyla verilen herhangi bir $a,b \in \mathbb{R}$ için Eş. 4.35 denkleminin

$t \to \infty$ iken $x(t) = at + b + o(t)$

olacak şekilde bir $x(t)$ çözümü vardır.

KAYNAKLAR

1. Ertem, T., Zafer, A. (2013). Asymptotic integration of second-order nonlinear differential equations via principal and nonprincipal solutions. ***Appl. Math. and Comput.*** 219, 5876-5886.

2. Kelley, W., Peterson, P. (2004). The theory of differential equations classical and qualitative. ***Pearson Education Inc, New Jersey***.

3. Morse, M., Leighton, W. (1936). Singular quadratic functionals. ***Trans. Amer. Math. Soc.*** 40, 252-286.

4. Özbekler, A., Wong, J.S.W., Zafer, A. (2011). Forced oscillation of second-order nonlinear differential equations with positive and negative coefficients. ***Appl. Math. Lett.*** 24, 1225-1230.

5. Dosly, O., Rehak, P. (2005). Half-linear differential equations. ***Elsevier Ltd., Heidelberd***.

6. Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan, D. (2002). Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations. ***Kluwer Academic Publishers, Dordercht***.

7. Wong, J.S.W. (1999). Oscillation criteria for forced second-order linear differential equation. ***J. Math. Anal. Appl***. 231, 235-240.

8. Chen, S. (1991). Asymptotic integrations of nonoscillatory second order differential equations. ***Trans. Amer. Soc***. 327, 853-865.

9. Chen, S. (1991). Asymptotic integration of the principal solution of a second-order differential equation. ***Bull. London Math. Soc***. 23, 457-464.

10. Simsa, J. (1987). Asymptotic integration of second order ordinary differential equations. ***Proc. Amer. Math. Soc***. 101, 96-100.

11. Trench, W.F. (1986). Linear perturbation of a nonoscillatory second order differential equation. ***Proc. Amer. Math. Soc.*** 97, 423-428.

12. Ladas, G. (1971). On Principal solutions of nonlinear differential equations. ***J. Math. Anal. Appl.*** 36, 103-109.

13. Hartman, P. (1964). Ordinary differential equations. ***SIAM, Philadelphia***.

14. Özbekler, A., Zafer, A. (2010). Principal and nonprincipal solutions of impulsive differential equations with applications. ***Appl. Math. Comput***. 216, 1158-1168.

15. Zafer, A. (2009). On oscillation and nonoscillation of second order dynamic equations. ***Appl. Math. Lett***. 22, 136-141.

16. Dosly, O., Ünal, M. (2009). Nonprincipal solutions of half-linear second order differential equations. ***Nonlinear Anal.*** 71, 4026-4033.

17. Dosla, Z., Dosly, O. (2008). Principal solutions of half-linear differential equations: Limit and integral characterization. ***Ejqtde. Proc. 8th. Coll. Qtde***. 7, 1-14.

18. Cecchi, M., Dosla, Z. (2007). Limit and integral prooerties of principal solutions for half-linear differential equations. ***Arch. Math. (Brno).*** 43, 75-86.

19. Cecchi, M., Dosla, Z., Marini, M. (2005). Half-linear equations and characteristic properties of the principal solutions. ***J. Differential Equations***. 208, 494-507.

20. Dosly, O. (1992). Principal solutions and transformations of linear hamiltonian systems. ***Arch. Math. (Brno).*** 28, 113-120.

21. Rainkin, S.M. (1976). Oscillation theorems for second order nonhomogeneous linear differential equations. ***J. Math. Anal. Appl***. 53, 550-553.

22. Skidmore, A., Bowers, J.J. (1975). Oscillatory behaviour of solutions of $y'' + p(x)y = f(x)$. ***J. Math. Anal. Appl***. 49, 317-323.

23. Skidmore, A., Leighton, W. (1973). On the differential equation $y'' + p(x)y = f(x)$, J. ***Math. Anal. Appl***. 43, 46-55.

24. Teufel, H.Jr. (1972). Forced second order nonlinear oscillations. ***J. Math. Anal. Appl***. 40, 148-152.

25. Keener, M.S. (1971). Solutions of a certain linear nonhomogeneous second order differential equations***.*** ***Appl. Anal***. 1, 57-63.

26. Dosly, O., Elbert, A. (2000). Integral characterization of the principal solution of half-linear second order differential equations. ***Studia Sci. Math. Hungar***. 36, 455-469.

27. Dosly, O., Lomtatidze, A. (2006). Oscillation and nonoscillation cirteria for half-linear second order differential equations. ***Hiroshima Math. J.*** 36, 203-219.

28. Fisnarova, S., Marik, R. (2011). Half-linear ordinary differential equation: Comparison theorems, integral characterization of principal solution. ***Nonlinear Anal***. 74, 6427-6433.

29. Elbert, A., Kusano, T. (1988). Principal solutions of nonoscillatory half-linear differential equations. ***Adv. Math. Sci. Appl.*** 18, 745-759.

30. Mirzov, J.D. (1988). Principal and nonprincipal solutions of a nonoscillatory system. ***Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Mat. Trudy.*** 31, 100-117.

31. Cecchi, M., Dosla, Z., Marini, M. (2005). Half-linear differential equations with oscillating coefficient. ***Differential Integral Equ.*** 18, 1243-1256.

32. Dosly, O., Reznickova, J. (2003). Regular half-linear second order differential equations. ***Arch. Math. (Brno).*** 39. 233-245.

33. Elbert, A. (1987). On the half-linear second order differential equations. ***Acta Math. Hungar.*** 49, 487-508.

34. Hoshino, H., Imabayashi, R., Kusano, T., Tanigawa, T. (1998). On second-order half-linear oscillations***. Adv. Math. Sci. Appl***. 8(1), 199-216.

35. Jaros, J., Kusano, T., Tanigawa, T. (2003). Nonoscillation theory for second order half-linear differential equations in the framework of regular variation. ***Results Math***. 43, 129-149.

36. Mirzov, J.D. (1993,2004). Asymptotic properties of solutions of the systems of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations. ***(Russian), Maikop, Adygeja publ***, ***the english: Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Masaryk. Brun. Math.*** 14.

37. Agarwal, R.P., Djebali, S., Moussaoui, T., Mustafa, O.G. (2007). On the asymptotic integration of nonlinear differential equations***. J. Comput. Appl. Math***. 202, 352-376.

38. Kiguradze, I.T., Chanturia, T.A. (1993). Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. ***Kluwer Academic Publishers, Dordrecht***.

39. Eastham, M.S.P. (1989). The asymptotic solution of linear differential systems. applications of the levinson theorem. ***Clarendon Press, Oxford***.

40. Coppel, W.A. (1965). Stability and asymptotic behavior of differential equations. ***D.C. Heath and Company, Boston***.

41. Bellman, R. (1953). Stability theory of differential equations. ***McGraw-Hill, London***.

42. Caligo, D. (1941). Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' + a(t)\,y = 0$, nell'ipotesi $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$. ***Boll. Un. Mat. Ltal***. 3, 286-295.

43. Lipovan, O. (2003). On the asymptotic behavior of the solutions to a class of second order nonlinear differential equations***. Glasgow Math. J.*** 45, 179-187.

44. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V. (2006). Asymptotic integration of a class of nonlinear differential equations. ***Appl. Math. Lett.*** 19, 849-853.

45. Hale, J.K., Onuchic, N. (1963). On the asymptotic behavior of solutions of a class of differential equations. ***Contrib. Differ. Equ***. 2, 61-75.

46. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V. (2002). Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations. ***Nonlinear Anal.*** 51, 339-368.

47. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V. (2006). A note on asymptotic integration of second order nonlinear differential equations***. Bol. Soc. Mat. Mexicana*** 12, 207-213.

48. Mustafa, O.G., Rogovchenko, S.P., Rogovchenko, Y.V. (2010). Asymptotic integration of second-order differential equations. ***Levinson-Weyl theory, Poincare-Perron property, Lyapunov type numbers, and dichotomy, Nonlinear Stud***. 17, 95-119.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : QAROOT, Adil Hussein Mustafa

Uyruğu : Irak

Doğum tarihi ve yeri : 07.07.1986, Musul, Irak

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0 (554) 691 27 94

E-mail : adilqaroot86@yahoo.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Musul Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2009
Lise	Telafer Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-2010	El- Medine El-Munvara Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce, Arapça

Hobiler

Kitap Okuma, Kültür Gezileri