FINITARY PERMUTASYON GRUPLARI

Yıldız AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2OO9
ANKARA

Yıldız AYDIN tarafından hazırlanan FINITARY PERMUTASYON GRUPLARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr. Aynur ARIKAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ ……………………………….
Matematik Bölümü, Hacettepe Üniversitesi
Doç. Dr. Ahmet ARIKAN ……………………………….
Matematik Eğitimi Bölümü, Gazi Üniversitesi
Yard. Doç. Dr. Aynur ARIKAN ……………………………….
Matematik Bölümü, Gazi Üniversitesi

Tarih 10/02/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yıldız AYDIN

FINITARY PERMÜTASYON GRUPLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Yıldız AYDIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2009

ÖZET

Bu tez çalışmasında A.O. Asar'ın 'Finitary permutasyon Grupları' başlıklı makalesi üzerinde çalıştık. Bu makalede sonsuz bir küme üzerindeki finitary permütasyonların bir geçişli grup yapısının nokta dengeleyeni yapısından elde edilebilmesi için yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca finitary permütasyonların bir totally imprimitive p-grubunun sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grubunun varlığı için yeter koşullar verilmiştir. Bu sonuçlar bazı bilinen sonuçlar yardımıyla bir mükemmel lokal sonlu minimal non FC-(p-grup) un var olamayacağına ilişkin yeter koşul verir. Böylece bu makalenin daha açık, ayrıntılı ve kolay anlaşılabilir şeklini ortaya çıkardık.

Bilim Kodu : **204.1.025**
Anahtar Kelimeler : **Finitary permutasyon, ilkel, almost primitive, totally imprimitive**
Sayfa Adedi : **45**
Tez Yöneticisi : **Yrd. Doç. Dr. Aynur ARIKAN**

FINITARY PERMUTATION GROUPS
(M Sc. Thesis)

Yıldız AYDIN

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2009

ABSTRACT

In this thesis work we have studied the paper written by A.O. Asar titled 'On Finitary Permutation Groups'.In this paper some sufficient conditions are given under which the structure of a transitive group of finitary permutations on an infinite set can be determined from the structure of a point stabilizer. Also, some sufficient conditions are given for the existence of a proper subgroup having an infinite orbit in a totally imprimitive p-group of finitary permutations. These results, with the help of some known results, give sufficient conditions for the nonexistence of a perfect locally finite minimal non FC- (p-group). Thus we made clear and more detailed and put in more easily understandable in this paper.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Finitary permutation, primitive, almost primitive, totally imprimitive
Page Number : 45
Adviser : Assist. Prof.Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında benden yardımlarını esirgemeyen ve kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Yard. Doç. Dr. Aynur Arıkan'a ve desteklerini her zaman hissettiğim sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$H \leq G$	*H, G* nin altgrubudur
$H \lhd G$	*H, G* nin normal altgrubudur
$H \cong K$	*H* ile *K* izomorftur
x^y	*x* in *y* ile eşleniği
$[x,y]$	*x* in *y* ile komütatörü
$C_G(a)$	*a* nın *G* içindeki merkezleyeni
$Z(G)$	*G* grubunun merkezi
$Z_\infty(G)$	*G* nin hipermerkezi
$N_G(H)$	*H* nin *G* içindeki normalleyeni
$\lvert G:H \rvert$	*H* nin *G* içindeki indeksi
$\langle x \rangle$	*x* tarafından üretilen devirli grup
G'	$[G,G]$
$G^{(n)}$	$[G^{(n-1)},G]$
G/H	*G* nin *H* ile bölüm grubu
$FitG$	*G* nin Fitting altgrubu
$G(\alpha)$	*G* altında α nın yörüngesi
G_α	*G* altında α nın dengeleyeni
$Sym(\Omega)$ veya S^Ω	Ω üzerinde simetrik grup
$Ker(\rho)$	ρ dönüşümünün çekirdeği
$\mathrm{Im}(\rho)$	ρ dönüşümünün görüntü kümesi
H_G veya $Core_G H$	H nin *G* içindeki özü
G_Δ veya $G_{(\Delta)}$	Δ nın *G* de nokta dengeleyeni

Simgeler	**Açıklama**
$G_{\{\Delta\}}$	Δ nın G de küme dengeleyeni
supp(x)	*x* in desteği
$FSym(\Omega)$	Ω üzerinde finitary simetrik grup
$Alt(\Omega)$	Ω üzerinde alterne grup
$\eta(G)$	*G* nin *Hirsch-Plotkin* radikali
o(a)	a elemanının mertebesi

1. GİRİŞ

Ω bir küme ve $Sym(\Omega)$, Ω üzerindeki simetrik grup olsun. Her bir $x \in Sym(\Omega)$ için *supp(x)* $= \{i \in \Omega : x(i) \neq i\}$ kümesine *x in desteği* denir . Eğer *supp(x)* sonlu ise o zaman *x* e *finitary permütasyon* denir. Ω üzerindeki bütün finitary permütasyonların kümesi bir altgrup oluşturur ve $FSym(\Omega)$ ile gösterilir.

G, $Sym(\Omega)$ nin bir altgrubu ve $\alpha \in \Omega$ olsun. O zaman $G_\alpha = \{g \in G : g(\alpha) = \alpha\}$ kümesine α nın G deki *dengeleyeni* ve $G(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in G\}$ kümesine de G nin α yı içeren *yörüngesi* denir. Daha genel olarak Δ, Ω nın boştan farklı bir altkümesi olmak üzere $G_\Delta = \{g \in G : g(i) = i, \forall i \in \Delta\}$ kümesine Δ nın *nokta dengeleyeni* ve $G_{\{\Delta\}} = \{g \in G : g(\Delta) = \Delta\}$ kümesine Δ nın *küme dengeleyeni* denir. Bundan başka eğer $\forall g \in G$ için $g(\Delta) = \Delta$ veya $g(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ ise o zaman Δ ya G için bir *blok* denir. Ω ya eşit olmayan ve en az iki elemanlı bir bloğa *öz blok* denir.

Eğer G bir FC-grup değil fakat her öz altgrubu FC-grup ise G ye minimal *non FC-grup* denir.

Ω sonsuz küme ve G, $FSym(\Omega)$ nin geçişli altgrubu olsun. Eğer G nin öz bloğu yoksa o zaman G ye *ilkel,* G nin öz bloğu varsa *ilkel değildir* denir. G ilkel ise o zaman $Alt(\Omega)$ veya $FSym(\Omega)$ ya izomorftur [3]. Eğer G ilkel değilse o zaman her öz blok sonludur. Eğer G nin bir maksimal bloğu Δ var ise o zaman $\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$, G için bir bloklar sistemidir. G, Σ üzerine ilkel etki eder ve $Alt(\Omega)$ veya $FSym(\Omega)$ ya izomorf olan epimorfik görüntüye sahiptir [3]. Böylece sonlu blokların

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_k \subset \ldots$$

Artan sonsuz dizisi vardır öyle ki $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ dir. Bu durumda Ω ve G sayılabilir sonsuzdur.

$k \geq 1$ ve $\Sigma_k = \{x(\Delta_k) : x \in G\}$ olsun. $\forall g \in G$ için $\overline{g}(x(\Delta_k)) = (gx)(\Delta_k)$ eşitliği Σ_k üzerinde bir permütasyon tanımlar ve buna karşılık $g \to \overline{g}$, G den $FSym(\Omega)$ ye bir permütasyon temsilidir. N_k bu temsilin çekirdeği olsun. O zaman

$N_1 \leq N_2 \leq ... \leq N_k \leq ...$

G nin $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ olacak şekilde öz normal altgruplarının artan bir dizisidir ve her bir N_k kendisinin bir sonlu epimorfik görüntüsünün izomorfik kopyalarının sınırlı direkt çarpımına izomorftur. Özel olarak her bir N_k bir FC-gruptur [3]. İlkel olmama durumu almost primitive ve totally imprimitive kısımlarından oluşur.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

Tanım 2.1:

G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ ve $n \in N$ için $g^{-1}ng \in N$ ise o zaman N ye G nin bir *normal alt grubu* denir ve $N \lhd G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2:

G bir grup olsun. G nin birimden başka normal öz alt grubu yoksa G grubuna *basit grup* denir.

Tanım 2.3:

G bir grup X, G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. X i içeren G nin bütün alt gruplarının kesişimine X *tarafından üretilen altgrup* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ise

$\langle X \rangle = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$

altgrubuna $a_1, a_2, ..., a_n$ elemanları tarafından üretilen sonlu üreteçli alt grup denir

Tanım 2.4:

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. $x^y = y^{-1}xy$ elemanına x *in* y *ile eşleniği (konjugesi)* denir.

X ve Y, G nin boştan farklı alt kümeleri olsun. G nin X in Y ile eşleniği olan alt grubu

$X^Y = \langle x^y : x \in X, y \in Y \rangle$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.5:

G bir grup olsun. G nin içinde sonlu sayıda eşleniği olan G nin bir elemanına G nin *FC-elemanı* denir. G nin bütün FC-elemanları bir alt grup oluşturur ve bu alt gruba G nin *FC-merkezi* denir. Eğer G nin FC-merkezi G ye eşit ise o zaman G ye bir *FC-grup* denir. G, FC-grup ise aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) G nin FC-grup olması için gerek ve yeter şart $|G : C_G(x)|$ in sonlu olmasıdır.

ii) G, FC-grup ise G' periyodiktir.

iii) G nin FC-grup olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in G$ için $\langle x \rangle^G$ nin sonlu bir grubun devirli grupla genişlemesi olmasıdır.

Tanım 2.6:

G bir grup ve $x_1, x_2, ..., x_n \in G$ olsun.

$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$

elemanına x_1 *ile* x_2 *nin komütatörü* denir. $[x_1] = x_1$ ve genel olarak $n \geq 2$ olmak üzere ağırlıklı basit bir komütatör

$[x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, x_2, ..., x_{n-1}], x_n]$

şeklinde tanımlanır. X_1 ve X_2, G nin boştan farklı altkümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör alt grubu

$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$

olarak tanımlanır. Özel olarak $X_1 = X_2$ =G ise $[G, G] = G'$ komütatör grubuna G nin *derived altgrubu* denir. Daha genel olarak $[X_1] = \langle X_1 \rangle$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$[X_1 X_2, ..., X_n] = [[X_1, X_2, ..., X_{n-1}], X_n]$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7:

Bir G grubu komütatörüne eşit ise bu gruba *mükemmel* grup denir.

Tanım 2.8:

G bir grup ve $a \in G$ olsun.

$C_G(a) = \{x \in G : [x, a] = 1\}$

kümesine a *nın G içindeki merkezleyeni* denir. Eğer $N \leq G$ ise

$C_G(N) = \{x \in G : \forall n \in N$ için $[n, x] = 1\}$

kümesine *N nin G içindeki merkezleyeni* denir.

$C_G(a)$ ve $C_G(N)$, G nin alt gruplarıdır. Özel olarak $N \lhd G$ ise $C_G(N) \lhd G$ dir. $C_G(G)$ alt grubuna *G nin merkezi* denir ve $Z(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9:
G bir grup, *H* , *G* nin bir alt grubu olsun.

$N_G(H) = \{g \in G : H = g^{-1}Hg\}$

grubuna *H nin G deki normalleyeni* denir.

Tanım 2.10:
G bir grup olsun. Eğer *G* nin her öz altgrubu normalleyeni tarafından öz olarak içeriliyorsa *G* ye *normalleyen şartını* sağlıyor denir.
Başka bir ifadeyle *G* nin normallayen şartını sağlaması için gerek ve yeter şart her $H < G$ için $H < N_G(H)$ olmasıdır.

Tanım 2.11:
G bir grup olsun. Eğer, S=$\{1 = G_0, G_1, ..., G_n = G\}$ G nin altgruplarının bir dizisi ve $G_i \lhd G_{i+1}$ (i=0,1,…,n-1) olmak üzere

$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$

ise S ye G nin bir *sonlu serisi* denir. G_{i+1}/G_i bölüm gruplarına *serinin faktörleri* ve G_i gruplarına *serinin terimleri* denir. Eğer bütün G_i ler farklı ise n negatif olmayan tam sayısına *serinin uzunluğu* denir.

Tanım 2.12:
G bir grup olmak üzere eğer G nin bir abelyan serisi varsa G ye *çözülebilir*dir denir. Burada *abelyan seri* her bir G_{i+1}/G_i bölüm grubunun abelyan olduğu

$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$

serisidir.

Tanım 2.13:

$\{H_\alpha : \alpha \leq \beta\}$, H_α, G nin alt grupları olmak üzere eğer;

a) $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$

b) $H_0 = 1$ ve $H_\beta = G$

c) $H_\alpha \lhd H_{\alpha+1}$

d) $H_\lambda = \bigcup_{\alpha \leq \lambda} H_\alpha$, λ bir limit ordinal

şartlarını sağlayan

$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_\beta = G$

serisine bir *ascending seri* denir. Burada H_α lar serinin terimleri β serinin uzunluğudur. Eğer G nin bir alt grubu ascending serinin içinde ortaya çıkarsa bu alt gruba *ascendant alt grup* denir.

Tanım2.14:

G bir grup, $G^{(0)} = G$ olsun. i>0 olmak üzere

$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$

Şeklinde tanımlansın. O zaman

$... \leq G^{(2)} \leq G^{(1)} \leq G$

dir. Buna G nin *derived serisi* denir. $G^{(1)} = G'$ ile gösterilir.

Tanım 2.15:

Eğer bir n için $G^{(n)} = \langle e \rangle$ ise o zaman G ye *çözülebilir grup* denir.

Tanım 2.16:

$\mathfrak{D}$ bir grup özelliği ve G bir grup olmak üzere eğer G nin her bir sonlu altkümesi G nin bir $\mathfrak{D}$-altgrubu tarafından içeriliyorsa G ye *lokal* $\mathfrak{D}$*-grup* denir.

Tanım 2.17:

Her sonlu üreteçli alt grubu sonlu olan gruba *lokal sonlu grup* denir.

Tanım 2.18:

G bir grup ve p bir asal sayı olmak üzere eğer G nin elemanlarının mertebesi p asal sayısının bir kuvveti ise G grubuna p-grup denir.

Tanım 2.19:

G bir grup, $Z_0(G)=1$, $Z_1(G)=Z(G)$ olsun.

Eğer α limit ordinal ise

$$Z_\alpha(G)=\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G)$$

α limit ordinal değilse

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G)=Z(G/Z_{\alpha-1}(G))$$

şeklinde tanımlansın. *G* nin kardinali aşılamayacağından $Z_\lambda(G)=Z_{\lambda+1}(G)=\ldots$ olacak şekilde bir λ ordinali vardır. Bu terminal gruba *G* nin <u>*hipermerkezi*</u> denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir.

$$1=Z_0(G)\leq Z_1(G)\leq \ldots$$

ye *G* nin *genelleştirilmiş yukarı merkez serisi* denir.

Eğer $Z_\infty(G)=G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G)=G$ ise G nilpotent gruptur. Bu şekildeki n tamsayılarının en küçüğü G nin *nilpotentlik sınıfı*dır.

Teorem 2.20:

Her sonlu p-grubu nilpotenttir.

Teorem 2.21:

Sonlu sayıda nilpotent grupların direkt çarpımı nilpotenttir.

Lemma 2.22:

Bir nilpotent *G* grubunun aşikâr olmayan altgrubu *H* ise o zaman *H*, $N_G(H)$ nin öz altgrubudur.

Teorem 2.23:

G grup ise o zaman G', G nin normalidir ve G/G' abelyandır. Eğer $N \lhd G$ ise o zaman G/N nin abelyan olması için gerek ve yeter şart N nin G' nü içermesidir.

Lemma 2.24:

Her nilpotent grup çözülebilirdir.

Teorem 2.25:

(i) Çözülebilir grubun her altgrubu ve her homomorfik görüntüsü çözülebilirdir.

(ii) $N \lhd G$, N ve G/N çözülebilir ise G çözülebilirdir.

Teorem 2.26: (Hirsch-Plotkin)

H ve K bir grubun normal lokal-nilpotent altgrupları olsun. O zaman $J = HK$ lokal-nilpotenttir [2].

Tanım 2.27:(Hirsch-Plotkin Radikali)

G bir grup olsun. O zaman G nin bütün normal lokal-nilpotent altgruplarını içeren bir tek maksimal normal nilpotent altgrubu vardır. Bu altgruba *Hirsch-Plotkin radikali* denir [2].

Teorem 2.28: (Plotkin)

Eğer G grubu normalleyen şartını sağlarsa o zaman G lokal nilpotenttir [2].

Tanım 2.29:

Bir grubun normal devirli serisi varsa bu gruba *süpersoluble* grup denir. Burada normal devirli seri faktörleri devirli olan normal altgrupların serisidir.

Tanım 2.30:

G nin bütün normal nilpotent altgrupları tarafından üretilen altgrubuna G nin *Fitting altgrubu* denir ve $FitG$ ile gösterilir.

Tanım 2.31:

G bir p-grup olsun. her bir n doğal sayısı için

$\Omega_n(G) = \langle x : x \in G, x^{p^n} = 1 \rangle$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.32:

Eğer G bir süpersoluble ise o zaman Fit(G) nilpotenttir ve G/Fit(G) sonlu abelyan gruptur. Özel olarak G' nilpotenttir.

Tanım 2.33:

Ω boştan farklı bir küme, G bir grup ve

$G \times \Omega \to \Omega$

$(x, \alpha) \mapsto x(\alpha)$

fonksiyon olsun. Eğer:

i) $1 \in G$ için $1(\alpha) = \alpha$

ii) $\forall x, y \in G$ için $xy(\alpha) = x(y(\alpha))$ ise

G grubu Ω üzerine *etki* ediyor denir.

Tanım 2.34:

G bir grup olsun ve bir Ω kümesi üzerine etki etsin. O zaman

$G(\alpha) = \{x(\alpha) : x \in G\}$

kümesine α nın G altındaki *yörüngesi* denir. α yı sabit bırakan G nin elemanlarının kümesine de G altında α nın *dengeleyeni* denir ve

$G_\alpha = \{x \in G : x(\alpha) = \alpha\}$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.35:

G grubu, Ω kümesi üzerine etki etsin. Eğer G altında Ω nın bir tek yörüngesi varsa bu etkiye Ω üzerinde *geçişlidir* denir. Yani $\forall \alpha \in \Omega$ için $G(\alpha) = \Omega$ dir. başka bir ifadeyle $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha = x(\beta)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır.

Teorem 2.36:

G grubu bir Ω kümesi üzerine etki etsin ve $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in \Omega$ olsun. O zaman;

i) $G(\alpha)$ ve $G(\beta)$ ya eşit ya da ayrıktır. Böylece ikişer ikişer ayrık olan bütün yörüngelerin birleşimi Ω yı verir.

ii) G nin G_α dengeleyeni G nin bir altgrubudur ve $\beta = x(\alpha)$ ise $G_\beta = xG_\alpha x^{-1}$ dir. Bundan başka $x(\alpha) = y(\alpha) \Leftrightarrow xG_\alpha = yG_\alpha$ dir.

iii) Yörünge-Dengeleyen Özelliği; $\alpha \in \Omega$ için $|G(\alpha)| = |G : G_\alpha|$ dir. Özel olarak eğer G sonlu ise $|G(\alpha)||G_\alpha| = |G|$ dir.

İspat:

i) $\delta \in G(\alpha)$ ise o zaman bir $u \in G$ için $\delta = u(\alpha)$ dır. Böylece

$G(\delta) = \{x(\delta) : x \in G\} = \{xu(\alpha) : x, u \in G\} = G(\alpha)$

dır. Kabul edelim ki $\alpha, \beta \in \Omega$ için $G(\alpha) \cap G(\beta) = \emptyset$ olsun. O zaman bir $\delta \in \Omega$ için

$$
\begin{aligned}
\delta \in G(\alpha) \cap G(\beta) &\Rightarrow \delta \in G(\alpha) \text{ ve } \delta \in G(\beta) \text{ dir.} \\
&\Rightarrow G(\delta) = G(\alpha) \text{ ve } G(\delta) = G(\beta) \\
&\Rightarrow G(\alpha) = G(\beta)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla ya $G(\alpha) \cap G(\beta) = \emptyset$ ya da $G(\alpha) = G(\beta)$ dır.

Ayrıca $\forall \alpha \in \Omega$ için $\alpha = 1(\alpha) \in G(\alpha)$ dir. o halde $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} G(\alpha)$ dır.

ii) G_α grubunun G nin bir altgrubu olduğunu gösterelim.

$1 \in G \Rightarrow 1(\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 \in G_\alpha = \{x \in G : x(\alpha) = \alpha\} \Rightarrow \emptyset \neq G_\alpha \subseteq G$

$x, y \in G_\alpha$ ise $x(\alpha) = \alpha$ ve $y(\alpha) = \alpha$ dır.

$y(\alpha) = \alpha \Rightarrow y^{-1}(y(\alpha)) = y^{-1}(\alpha) \Rightarrow \alpha = y^{-1}(\alpha) \Rightarrow y^{-1} \in G_\alpha$ dir.

Buradan;

$xy^{-1}(\alpha) = x(y^{-1}(\alpha)) = x(\alpha) = \alpha \Rightarrow xy^{-1} \in G_\alpha$ dır. Böylece $G_\alpha \leq G$ dir.

Eğer $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\beta = x(\alpha)$ ise o zaman;

$$y \in G_\beta \Leftrightarrow y(\beta) = \beta \Leftrightarrow y(x(\alpha)) = x(\alpha) \Leftrightarrow yx(\alpha) = x(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}yx(\alpha) = x^{-1}x(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}yx(\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}yx \in G_\alpha$$

$$\Leftrightarrow y \in xG_\alpha x^{-1}$$

olduğundan $G_\beta = xG_\alpha x^{-1}$ dir.

Şimdi $x(\alpha) = y(\alpha) \Leftrightarrow xG_\alpha = yG_\alpha$ olduğunu gösterelim.

$$x(\alpha) = y(\alpha) \Leftrightarrow y^{-1}x(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow y^{-1}x \in G_\alpha \Leftrightarrow y^{-1}xG_\alpha = G_\alpha \Leftrightarrow xG_\alpha = yG_\alpha$$

dır.

iii) G$_\alpha$ nın G içindeki sol kosetlerinin bir tam kümesi $\mathscr{A}$ olsun.

$\mathscr{A} = \{xG_\alpha : x \in G\}$ şeklinde tanımlıdır.

$\varphi : G(\alpha) \to \mathscr{A}$

$x(\alpha) \mapsto xG_\alpha$

fonksiyonu iyi tanımlıdır. Çünkü $x(\alpha) = y(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart (ii) den dolayı $xG_\alpha = yG_\alpha$ dir. Böylece φ iyi tanımlı ve ayrıca φ birebirdir. φ tanımdan örtendir. O halde; $|G(\alpha)| = |\mathscr{A}| = |G : G_\alpha|$ olur. $|G| < \infty$ ise $|G(\alpha)| = |G : G_\alpha| = |G| / |G_\alpha|$ olduğundan $|G(\alpha)||G_\alpha| = |G|$ elde edilir.

3. PERMÜTASYON GRUPLARI

Tanım 3.1:

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω nın kendi üzerine birebir, örten fonksiyonuna Ω nın bir permütasyonu denir. Ω nın bütün permütasyonları fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Buna Ω üzerinde bir *simetrik grup* denir ve $Sym(\Omega)$ veya S^{Ω} veya S_{Ω} şeklinde gösterilir. n pozitif tamsayı ve $\Omega = \{1,2,...,n\}$ olmak üzere $Sym(\Omega)$ grubu özel olarak S_n ile gösterilir. Simetrik grubun her alt grubuna bir *permütasyon grubu* denir. Eğer Ω ve Ω' aynı kardinaliteye sahip boştan farklı iki küme ise (Ω dan Ω' üzerine $\alpha \to \alpha'$ birebir örten fonksiyon vardır.) o zaman $x \to x'$ şeklinde tanımlı fonksiyon $Sym(\Omega)$ dan $Sym(\Omega')$ ne bir izomorfizmadır. Burada x, α yı β ya götürdüğünde x', α' yi β' ye götürür. Özel olarak $|\Omega| = n$ ise $Sym(\Omega) \cong S_n$ dir.

Tanım 3.2:

Bir $c \in Sym(\Omega)$ permütasyonu $i = 1,2,...,r-1$ olmak üzere Ω nın $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_r$ r farklı noktaları için δ_i yi δ_{i+1} e ve δ_r yi δ_1 e götürüyor ve diğer bütün noktaları sabit bırakıyor ise o zaman *c* permütasyonuna bir *r-devir* denir ve $c = (\delta_1 \delta_2 ... \delta_r)$ ile gösterilir. Eğer iki katlı sonsuz dizi $\delta_i \, (i \in N)$ için *c* permütasyonu her bir *i* için δ_i yi δ_{i+1} e götürüyor ve diğer bütün noktaları sabit bırakıyorsa *c* permütasyonuna *sonsuz devir* denir.

Lemma 3.3:

G bir grup, Ω boştan farklı bir küme olsun ve G, Ω kümesi üzerine etki etsin. O zaman

$\overline{x} : \Omega \to \Omega$, $\alpha \to \overline{x}(\alpha) = x(\alpha)$ 1-1 ve örten fonksiyondur.

Ayrıca ;

$\rho : G \to Sym(\Omega)$, $x \mapsto \overline{x}$ bir homomorfizmadır.

İspat:

G,Ω üzerine etki ettiği için $\forall x \in G$ ve $\forall \alpha \in \Omega$ için $x(\alpha) \in \Omega$ dır. Ayrıca $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için

$\bar{x}(\alpha) = \bar{x}(\beta) \Leftrightarrow x(\alpha) = x(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$

olduğundan $\bar{x}$ iyi tanımlı ve birebirdir. $\forall \alpha \in \Omega$ için $x \in G$ ise $x^{-1} \in G$ ve $x^{-1}(\alpha) \in \Omega$ dır. O zaman ;

$\bar{x}(x^{-1}(\alpha)) = xx^{-1}(\alpha) = 1(\alpha) = \alpha$

olduğundan $\bar{x}$ örtendir. O halde $\bar{x} \in Sym(\Omega)$ dir. Böylece ρ bir permutasyondur.

Şmdi etkinin tanımını kullanarak ρ nun bir homomorfizma olduğunu gösterelim. $\forall x, y \in G$ ve $\forall \alpha \in \Omega$ için

$\overline{xy}(\alpha) = xy(\alpha) = x(y(\alpha)) = \bar{x}(y(\alpha)) = \bar{x}(\bar{y}(\alpha)) = \bar{x}\bar{y}(\alpha)$

olur. Böylece $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ dir. O halde $\rho(xy) = \overline{xy} = \bar{x}\bar{y} = \rho(x)\rho(y)$ elde edilir.

Tanım 3.4:

G bir grup olsun. G den $Sym(\Omega)$ ya herhangi bir homomorfizmaya Ω üzerinde G nin bir *permütasyon temsili* denir.

Böylece Ω üzerinde G nin her bir etkisi G nin Ω üzerine bir temsilini verir. Ω nın kardinalitesine etkinin (ya da temsilin) derecesi ve ρ temsilinin $\ker(\rho)$ çekirdeğine etkinin *çekirdeği* denir.

Eğer $\ker(\rho) = 1$ ise etkiye sadıktır denir. Bir etki sadık ise 1. izomorfizma teoreminden $G \cong \mathrm{Im}(\rho)$ dır.

Tanım 3.5:

G bir grup H, G nin bir altgrubu olsun. $H_G = \bigcap_{a \in G} a^{-1}Ha$ ya G nin *özü (core)* denir.

$H_G \lhd G$ ve $H_G \leq H$ dir.

Lemma 3.6:
G bir grup ve H de G nin sonlu indeksli bir altgrubu olsun. O zaman H_G , G de sonlu indekslidir.

Böylece G nin her sonlu indeksli bir altgrubu içinde G de normal olan sonlu indeksli bir altgrup vardır.

Lemma 3.7:
G bir grup, Ω boştan farklı bir küme olsun. G, Ω üzerine etki etsin ve $H \leq G$ olsun. Eğer Δ, H için bir yörünge ise $\forall x \in G$ için $x(\Delta)$ de xHx^{-1} için bir yörüngedir. Ayrıca G , Ω kümesi üzerine geçişli etki ediyor ve $H \lhd G$ ise H nin her yörüngesi bir $x \in G$ için $x(\Delta)$ formundadır.

İspat:
Δ, H için bir yörünge ise bir $\alpha \in \Omega$ için $\Delta = H(\alpha)$ dır. O zaman $\forall x \in G$ için $x(H(\alpha)) = xH(\alpha) = x(\Delta)$ dır. $x(\alpha) = \beta$ olsun. O zaman $\alpha = x^{-1}(\beta)$ dir.
$\alpha = x^{-1}(\beta) \Rightarrow xH(\alpha) = xH(x^{-1}(\beta)) = xHx^{-1}(\beta) \Rightarrow x(H(\alpha)) = x(\Delta) = xHx^{-1}(\beta)$
olur. $xHx^{-1}(\beta)$, xHx^{-1} için bir yörünge olduğundan $x(\Delta)$ da xHx^{-1} için bir yörüngedir.
G , Ω üzerine geçişli etki etsin ve $H \lhd G$ olsun. $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha = x(\beta)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. Bu nedenle ilk durumdan $x(\Delta)$, xHx^{-1} için bir yörünge ve $H \lhd G$ olduğundan $xHx^{-1} = H$ dır. Böylece $x(\Delta)$, H için bir yörüngedir. $\beta \in \Omega$ olduğundan $H(\beta)$, H için bir yörüngedir. G, Ω üzerine etki ettiğinden $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\beta = x(\alpha)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. O halde
$H(\beta) = H(x(\alpha)) = Hx(\alpha) = xH(\alpha) = x(\Delta)$
Olduğundan H nin her yörüngesi bir $x \in G$ için $x(\Delta)$ formundadır.

4. BLOKLAR VE İLKELİK

Tanım 4.1:

G bir grup, Ω ve Δ boştan farklı kümeler olsun. G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin. $\Delta \subseteq \Omega$ olsun. Eğer $\forall x \in G$ için $x(\Delta) = \Delta$ veya $x(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ oluyorsa Δ ya G için bir *blok* denir. Aşikâr olarak $\forall \alpha \in \Omega$ için $\{\alpha\}$ ve Ω, G için bir bloktur. Bu bloklara aşikâr bloklar diğerlerine aşikâr olmayan blok denir.

Tanım 4.2:

G grubu Ω üzerine geçişli etki etsin. G grubunun Ω kümesi üzerinde sadece aşikâr bloğu varsa o zaman G grubuna *ilkeldir,* diğer durumda *ilkel değildir* denir.

Tanım 4.3:

G grubu bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin. Eğer G grubunun bir Δ maksimal öz bloğu varsa G grubuna *almost primitive* denir. Ve böylece Δ yı içeren tek blok Ω dır. Eğer G nin hiç maksimal öz bloğu yoksa o zaman G grubuna *totally imprimitive* denir. Eğer G totally imprimitive grup ise $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset ...$ olacak şekilde sonsuz sayıda sonlu öz blokların kesin artan dizisi vardır.

Tanım 4.4:

G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin ve $\Delta \subseteq \Omega$ olsun.

$G_{(\Delta)} = \{x \in G : x(\delta) = \delta, \delta \in \Delta\}$

Kümesine G de Δ nın nokta dengeleyeni denir.

$G_{\{\Delta\}} = \{x \in G : x(\Delta) = \Delta\}$

Kümesine de G de Δ nın küme dengeleyeni denir. $G_{\{\Delta\}}$ ve $G_{(\Delta)}$ grupları G nin alt gruplarıdır. Ayrıca $G_{(\Delta)} \lhd G_{\{\Delta\}}$ dır ve $\forall \alpha \in \Omega$ için $G_{\{\alpha\}} = G_{(\alpha)} = G_\alpha$ dır.

Lemma 4.5:

Eğer $G_\alpha \leq H$ ve H, G nin bir altgrubu ise o zaman $H(\alpha)$, G için bir bloktur.

İspat:

$\Delta = H(\alpha)$ olsun. Δ nın G için bir blok olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x \in G$ için $x(\Delta) \cap \Delta \neq \varnothing$ olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
\sigma \in x(\Delta) \cap \Delta &\Rightarrow \sigma \in x(\Delta) \text{ ve } \sigma \in \Delta = H(\alpha) \\
&\Rightarrow (\sigma \in x(\beta) \ \ni \beta \in \Delta = H(\alpha)) \text{ ve } (\sigma = h_1(\alpha) \ \ni h_1 \in H) \\
&\Rightarrow (\sigma \in x(\beta) \ \ni \beta = h_2(\alpha),\ h_2 \in H) \text{ ve } (\sigma = h_1(\alpha) \ \ni h_1 \in H) \\
&\Rightarrow \sigma = xh_2(\alpha) = h_1(\alpha) \ ,\ h_1, h_2 \in H \\
&\Rightarrow h_1^{-1} x h_2(\alpha) = \alpha \\
&\Rightarrow h_1^{-1} x h_2 \in G_\alpha \leq H \\
&\Rightarrow h_1^{-1} x h_2 \in H \\
&\Rightarrow x \in H \text{ elde edilir.}
\end{aligned}
$$

Buradan;

$$\Delta = H(\alpha) \Rightarrow x(\Delta) = x(H(\alpha)) = xH(\alpha) = H(\alpha) = \Delta \Rightarrow x(\Delta) = \Delta$$

olur. Böylece $x(\Delta) = \Delta$ olduğundan Δ, G için bir bloktur.

Lemma 4.6:

G grubu, Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin. Δ ise G için bir blok olsun. Bu durumda $\alpha \in \Delta$ için $G_{\{\Delta\}}(\alpha) = \Delta$ dır.

İspat:

$$
\begin{aligned}
g(\alpha) \in G_{\{\Delta\}}(\alpha) &\Rightarrow g \in G_{\{\Delta\}} \\
&\Rightarrow g(\Delta) = \Delta \\
&\Rightarrow g(\alpha) \in g(\Delta) = \Delta \\
&\Rightarrow g(\alpha) \in \Delta
\end{aligned}
$$

olur. O zaman $G_{\{\Delta\}}(\alpha) \subseteq \Delta$ dır. $\beta \in \Delta$ olsun. G geçişli olduğundan $\beta = g(\alpha)$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. O zaman $\beta \in g(\Delta) \cap \Delta$ olur. Δ blok olduğundan $\Delta = g(\Delta)$ dır. Böylece $g \in G_{\{\Delta\}}$ olur. O halde $\beta = g(\alpha) \in G_{\{\Delta\}}(\alpha)$ dir. Buradan $\Delta \subseteq G_{\{\Delta\}}(\alpha)$ ve dolayısıyla $G_{\{\Delta\}}(\alpha) = \Delta$ dır.

Lemma 4.7:

G grubu, Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin. H , G nin altgrubu ve G_α, G nin nokta dengeleyeni olsun. O zaman

$G = G_\alpha H \Leftrightarrow G = HG_\alpha \Leftrightarrow H$ nin geçişli olmasıdır.

Özel olarak G_α yı içeren G nin tek geçişli altgrubu G nin kendisidir.

İspat:

Önce $G = HG_\alpha$ ise H nin geçişli olduğunu gösterelim. $G = HG_\alpha$ olsun. G grubu, Ω kümesi üzerine geçişli olduğundan $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\beta = x(\alpha)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. $x \in G$ ise $G = HG_\alpha$ olduğundan $x = hy$ olacak şekilde $h \in H$ ve $y \in G_\alpha$ vardır. $y(\alpha) = \alpha$ olduğundan;

$\beta = x(\alpha) = hy(\alpha) = h(\alpha)$

dır.Böylece $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $h \in H$ vardır ki $\beta = h(\alpha)$ dır. Yani H geçişlidir.

Şimdi de H, Ω üzerinde geçişli olsun. $G = G_\alpha H$ olduğunu gösterelim. $x \in G$ olsun. G geçişli olduğundan $\forall \beta, \alpha \in \Omega$ için $\alpha = x(\beta)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. H, Ω üzerinde geçişli olduğundan $\beta = h(\alpha)$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. O zaman $\alpha = x(\beta) = x(h(\alpha))$ olduğundan $xh \in G_\alpha$ ve böylece $x \in G_\alpha H$ ve böylece $G \subseteq G_\alpha H$ olduğundan $G = G_\alpha H$ elde edilir. Ayrıca HG_α grup olduğundan $G_\alpha H = HG_\alpha$ dir. Özel olarak G_α yı içeren G nin geçişli bir alt grubu H olsun. H geçişli $G = G_\alpha H = HG_\alpha$ ve $G_\alpha \le H$ olduğundan G=H

Tanım 4.8:

G grubu bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin ve Δ, G için bir blok olsun.

$\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$

kümesine Δ *yı içeren blokların sistemi* denir.

Lemma 4.9:

G grubu, Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin ve Δ, G için bir blok olsun.

$\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$

olsun. Σ daki kümeler Ω nın bir parçalanması formundadır ve Σ nın her elemanı *G* için bir bloktur.

İspat:

$x(\Delta), y(\Delta) \in \Sigma$ ve $x(\Delta) \cap y(\Delta) \neq \emptyset$ olsun. $\beta \in x(\Delta) \cap y(\Delta)$ ise $\beta = x(\alpha) = y(\gamma)$ olacak şekilde $\alpha, \gamma \in \Delta$ vardır. O zaman $y^{-1}x(\alpha) = \gamma \in \Delta \cap y^{-1}x(\Delta)$ dır. Δ, *G* için bir blok olduğundan $\Delta = y^{-1}x(\Delta) \Rightarrow y(\Delta) = x(\Delta)$ olur ki bu ise bir çelişkidir. O halde $x(\Delta) \cap y(\Delta) = \emptyset$ veya $x(\Delta) = y(\Delta)$ dır.

$\bigcup\limits_{x(\Delta)\in\Sigma} x(\Delta) = \Gamma$, $\alpha \in \Omega$ ve $\beta \in \Delta$ olsun. *G* grubu, Ω kümesi üzerine geçişli olduğundan $\alpha = x(\beta)$ olacak şekilde $x \in G$ vardır. $\alpha = x(\beta) \in x(\Delta)$ olduğundan $\alpha \in \bigcup\limits_{x(\Delta)\in\Sigma} x(\Delta)$ dır. Böylece $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{x(\Delta)\in\Sigma} x(\Delta) \subseteq \Omega$ olduğundan $\Omega = \bigcup\limits_{x((\Delta)\in\Sigma} x(\Delta)$ dır. O halde Σ daki kümeler Ω nın bir parçalanması formundadır.

Şimdi Σ nın her elemanı *G* için bir blok olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y(x(\Delta)) \cap x(\Delta) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $y \in G$ olsun. O zaman $yx(\alpha) = x(\gamma)$ olacak şekilde $\alpha, \gamma \in \Delta$ vardır.

$yx(\alpha) = x(\gamma) \Rightarrow x^{-1}yx(\alpha) = \gamma \Rightarrow x^{-1}yx \in x^{-1}yx(\Delta) \cap \Delta$

dır. Δ, *G* için bir blok olduğundan $x^{-1}yx(\Delta) = \Delta$ ve böylece $y(x(\Delta)) = x(\Delta)$ dır. $x(\Delta)$, *G* için bir bloktur.

Lemma 4.10:

G grubu, Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin ve Δ, *G* için bir blok ve Σ, Δ yı içeren blokların sistemi olsun. O zaman *G,* Σ üzerine etki eder.

Lemma 4.11:

G bir grup, Ω boştan farklı bir küme olsun. *G,* Ω üzerine geçişli etki etsin ve *H, G* nin bir normal altgrubu olsun. O zaman;

i) H nin yörüngeleri G için blokların bir sistemi formundadır.

ii) Eğer Ω nin bir noktası H nin bütün elemanları tarafından sabit bırakılıyor ise o zaman H, Ω üzerindeki etkinin çekirdeği içindedir.

iii) H nin en fazla $|G:H|$ kadar yörüngesi vardır.

iv) Eğer G, Ω üzerine ilkel etki ediyorsa ya H geçişlidir ya da H etkinin çekirdeği içindedir.

İspat:

i) $\alpha \in \Omega$ olsun. $\Delta = H(\alpha)$, H için bir yörünge ve $\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$ olsun. $H \lhd G$ olduğundan Lemma 2.7 den dolayı $x(\Delta)$ da H için bir yörüngedir. $\forall x \in G$ için $x(\Delta) \subseteq \Omega$ olduğundan $\bigcup_{x\in G} x(\Delta) \subseteq \Omega$ dır. G, Ω üzerine geçişli etki ettiğinden $\forall \beta \in \Omega$ için $\alpha = y(\beta)$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. O halde;

$$y(\beta) = \alpha \in \Delta \Rightarrow y(\beta) \in \Delta$$

$$\Rightarrow y^{-1}(\alpha) = \beta \in y^{-1}(\Delta)$$

$$\Rightarrow \beta \in \bigcup_{x\in G} x(\Delta)$$

olur. Buradan $\Omega \subseteq \bigcup_{x\in G} x(\Delta)$ elde edilir. Bu nedenle $\Omega = \bigcup_{x\in G} x(\Delta)$ dir. O halde H nin her yörüngesi Σ sisteminin içindedir. Ayrıca Δ ve $\forall x \in G$ için $x(\Delta)$ blok olduğundan $\Delta \cap x(\Delta) = \emptyset$ veya $\Delta = x(\Delta)$. Bundan dolayı H nin yörüngeleri G için blokların bir sistemi formundadır.

ii) $\alpha \in \Omega$ için α, H nin bütün elemanları tarafından sabit bırakılsın. O halde $H(\alpha) = \{\alpha\}$ dır. Yani H nin uzunluğu bir olan yörüngesi vardır. (i) şıkkından H nin yörüngeleri $\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$ formunda olduğundan H nin bütün yörüngelerinin uzunluğu 1 dir. Lemma 2.3 den

$G \times \Omega \to \Omega$ etkisi varsa $\rho : G \to Sym(\Omega)$; $x \mapsto \bar{x}$

homomorfizması vardır. Bu etkinin çekirdeği ρ homomorfizmasının çekirdeğidir. O zaman

$$\ker(\rho) = \{x \in G : \rho(x) = 1\}$$

$= \{x \in G : \overline{x} = I\}$
$= \{x \in G : x(\alpha) = \alpha, \alpha \in \Omega\}$

olur. O halde $\forall \beta \in \Omega$ için $H(\beta) = \{\beta\}$ olduğundan $\forall h \in H$ için $h(\beta) = \beta$ dir. Bu nedenle $H \leq \ker(\rho)$

iii) H nin bütün yörüngelerinin kümesi (i) şıkkından dolayı Σ dır. H nin G içindeki bütün kosetlerinin kümesi $\mathscr{A}$ olsun. $|\mathscr{A}| = |G : H|$ dir.

$\varphi : \Sigma \to \mathscr{A}$
$x(\Delta) \mapsto xH$

Şeklinde tanımlı φ nin birebir olduğunu gösterelim. $x, y \in G$ için

$$
\begin{aligned}
\varphi(x(\Delta)) = \varphi(y(\Delta)) &\Leftrightarrow xH = yH \\
&\Leftrightarrow y^{-1}xH = H \\
&\Leftrightarrow y^{-1}x \in H \\
&\Leftrightarrow y^{-1}x(\Delta) = \Delta \\
&\Leftrightarrow x(\Delta) = y(\Delta)
\end{aligned}
$$

olur. O halde φ iyi tanımlı ve birebirdir. φ birebir olduğundan

$|\Sigma| \leq |\mathscr{A}| = |G : H|$ dır.

iv) G, Ω üzerine ilkel etki etsin. (i) şıkkından $\forall x(\Delta) \in \Sigma$, G için bir bloktur. G ilkel etki ettiğinden $|x(\Delta)| = 1$ ya da $x(\Delta) = \Omega$ olur. Eğer $|x(\Delta)| = 1$ ise (ii) şıkkından H etkinin çekirdeği içindedir. Eğer $x(\Delta) = \Omega$ ise o zaman $|\Sigma| = 1$ olur. O halde $\Delta = \Omega$ dir. Bu nedenle $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\beta = h(\alpha)$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. O zaman H geçişlidir.

Lemma 4.12:

G bir grup, Ω boştan farklı bir küme olsun. G, Ω üzerine geçişli etki etsin ve $H \leq G$ olsun. Σ, H nin bütün yörüngelerinin kümesi ise G nin Σ üzerinde bir ρ permütasyon temsili vardır ve $H \leq \ker(\rho)$ dır.

İspat:

Σ, H nin bütün yörüngelerinin kümesi ise $H(\alpha) = \Delta$ olmak üzere $\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$ dır. Şimdi G nin Ω üzerinde ρ permütasyon temsilini tanımlayalım.

$\rho : G \to Sym(\Sigma)$

$g \to \overline{g} : \Sigma \to \Sigma$

$x(\Delta) \mapsto gx(\Delta)$

dır.Bu temsilin çekirdeği $\ker(\rho) = \{g \in G : \rho(g) = \overline{g} = I\}$ olur. $x(\Delta) \in \Sigma$ olmak üzere $\overline{g}(x(\Delta)) = x(\Delta) \Rightarrow gx(\Delta) = x(\Delta)$ dır. $\forall h \in H$ için

$h(x(\Delta)) = h(x(H(\alpha))) = hxH(\alpha) = Hhx(\alpha) = xH(\alpha) = x(H(\alpha)) = x(\Delta)$

dır. Buradan $h(x(\Delta)) = x(\Delta)$ dır. O zaman $H \leq \ker(\rho)$ dır.

5. BİR ELEMANIN DESTEĞİ

Tanım 5.1:

G bir grup, Ω boştan farklı bir küme olsun ve *G* grubu Ω kümesi üzerine etki etsin.

supp(x)=$\{\alpha \in \Omega : x(\alpha) \neq \alpha, x \in G\}$

kümesine *x* in *desteği* denir.

Teorem 5.2:

G bir grup ve $x, y \in G$ için aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $y(supp(x)) = supp(yxy^{-1})$ ve özel olarak $x(supp(x)) = supp(x)$

(ii) $supp(y) = supp(y^{-1})$

(iii) $supp(xy) = supp(x) \cup supp(y)$

(iv) $supp(x) = \emptyset \Leftrightarrow x = 1$ dir.

İspat:

(i)
$$\begin{aligned} \alpha \in supp(yxy^{-1}) &\Leftrightarrow yxy^{-1}(\alpha) \neq \alpha \\ &\Leftrightarrow xy^{-1}(\alpha) \neq y^{-1}(\alpha) \\ &\Leftrightarrow x(y^{-1}(\alpha)) \neq y^{-1}(\alpha) \\ &\Leftrightarrow y^{-1}(\alpha) \in supp(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in y(supp(x)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

O halde $y(supp(x)) = supp(yxy^{-1})$ dir. Özel olarak $x(supp(x)) = supp(x)$ dır.

(ii)
$$\begin{aligned} supp(y) &= \{\alpha \in \Omega : y(\alpha) \neq \alpha\} \\ &= \{\alpha \in \Omega : y^{-1}y(\alpha) \neq y^{-1}(\alpha)\} \\ &= \{\alpha \in \Omega : \alpha \neq y^{-1}(\alpha)\} = supp(y^{-1}) \end{aligned}$$

dir.

(iii) $\alpha \in supp(xy)$ ise $xy(\alpha) \neq \alpha$ dır. Varsayalım ki $x(\alpha) = \alpha$ ve $y(\alpha) = \alpha$ olsun. O zaman $xy(\alpha) = x(y(\alpha)) = x(\alpha) = \alpha$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde ya

$x(\alpha) \neq \alpha$ ya da $y(\alpha) \neq \alpha$ dır. Bu nedenle $\alpha \in supp(x) \cup supp(y)$ dir. O zaman $supp(xy) \subseteq supp(x) \cup supp(y)$ dir.

(iv) $supp(x) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in \Omega$ için $x(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow x = 1$ dir.

6. FINITARY PERMÜTASYON GRUPLARI ÜZERİNE

Tanım 6.1:

Ω boştan farklı bir küme ve S^{Ω}, Ω kümesi üzerinde tanımlı simetrik grup olsun. S^{Ω} da sonlu desteğe sahip elemanların oluşturduğu küme S^{Ω} nın bir alt grubudur. Bu alt gruba *finitary simetrik grup* denir ve $FSym(\Omega)$ veya $S^{(\Omega)}$ ile gösterilir. Finitary simetrik grup,

$FSym(\Omega) = \{x \in Sym(\Omega) : |supp(x)| < \infty\}$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 6.2:

Ω sonsuz olmak üzere $G \leq FSym(\Omega)$ ve $H \lhd G$ olsun. O zaman H nin bütün yörüngeleri sonsuzsa o zaman $G' \leq H$ dir [3].

Lemma 6.3:

Ω herhangi bir küme ve *G, FSym(*Ω*)* nın geçişli bir alt grubu olsun. Δ, *G* nin bir öz bloğu ve *H, G* nin *supp(H)* $\subseteq \Delta$ olacak şekilde bir öz alt grubu olsun. O zaman :

a) Γ=supp(H) ise $G_{\Gamma} \leq C_G(H)$

b) $N_G(H) \leq G_{\{\Delta\}}$

c) $H \cap G_{\Delta} = 1$ ve $G_{\Delta} \leq C_G(H)$

d) $\forall x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ için $H^x \leq G_{\Delta}$ ve böylece $[H^x, H] = 1$

e) Eğer $x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ ise o zaman $H' \leq [H, x]$

şartları sağlanır.

İspat:

a) $h \in H$, $i \in \Gamma$ olsun. Önce $h(i) \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $h(i) \notin \Gamma$ ve $h(i) = j \neq i$, $j \notin \Gamma$ olsun. O zaman $\forall h_1 \in H$ için

$h_1(j) = j \Rightarrow h_1(j) = h(i) \Rightarrow j = hh_1^{-1}(i) \Rightarrow h(i) = h(h_1^{-1}(i)) \Rightarrow i = h_1^{-1}(i)$

$\Rightarrow h_1(i) = i$

dir.Böylece $i \notin supp(H)$ olur.Bu ise çelişkidir. Öyleyse eğer $i \in \Gamma$ ise $h \in H$ için $h(i) \in \Gamma$ dir.

Şimdi $x \in G_\Gamma$ için $i \in \Gamma$ ise $h(i) \in \Gamma$ dır. $x(i) = i$ olduğundan $x(h(i)) = h(x(i))$. Eğer $i \notin \Gamma$ ise o zaman $x(i) \notin \Gamma$ ve böylece $\forall h \in H$ için $h(x(i)) = x(i) = x(h(i))$ dir.

Böylece $hx = xh$ olduğundan $x \in C_G(H)$ ve $G_\Gamma \leq C_G(H)$ dır.

b) $g \in N_G(H)$ fakat $g \notin G_{\{\Delta\}}$ olsun. $g \in N_G(H) \Rightarrow g^{-1}Hg = H$ ve $supp(H) \subseteq \Delta$ olduğundan

$supp(g^{-1}Hg) \subseteq \Delta \Rightarrow g(supp(H)) \subseteq \Delta \Rightarrow supp(H) \subseteq g^{-1}(\Delta)$

Bundan başka

$g \notin G_{\{\Delta\}} \Rightarrow g^{-1} \notin G_{\{\Delta\}} \Rightarrow g^{-1}(\Delta) \neq \Delta$

Δ blok olduğundan $g^{-1}(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$. $supp(H) \subseteq \Delta$ *ve* $supp(H) \subseteq g^{-1}(\Delta)$ *ise* $supp(H)=\emptyset$ dır, bu ise çelişkidir. O halde $g \in G_{\{\Delta\}}$ ve böylece $N_G(H) \leq G_{\{\Delta\}}$.

c) $H \cap G_\Delta \neq 1$ olsun. O zaman bir $h \in H \cap G_\Delta$ var öyle ki $h \neq 1$.

$h \in H \cap G_\Delta \Rightarrow h \in H$ ve $h \in G_\Delta$

dır. Böylece $\forall i \in \Delta$ için $h(i) = i$ dır. Fakat $supp(H) \subseteq \Delta$ olduğundan özel olarak $i \in supp(H)$ için $h(i) = i$ dir. bu ise çelişkidir. O halde $H \cap G_\Delta = 1$.

Şimdi $G_\Delta \leq C_G(H)$ olduğunu gösterelim. $G_\Delta \subseteq C_G(H)$ olduğunu göstermek yeter. Bunun için $g \in G_\Delta$, $\forall h \in H$ ve $\forall i \in \Delta$ için $gh(i) = hg(i)$ olduğunu göstermeliyiz. $i \in supp(H) \Rightarrow (a)$ nın ispatından $h(i) \in supp(H)$. Böylece $h(i) \in \Delta$ ve buradan $hg(i) = h(g(i)) = h(i)$ ve $gh(i) = g(h(i)) = h(i)$. Eğer $i \notin supp(H) \Rightarrow \forall h \in H$ için $h(i) = i \in \Delta$ ve böylece

$hg(i) = h(g(i)) = h(i) = i = g(i) = g(h(i)) = gh(i)$

O halde $\forall h \in H$ ve $g \in G_\Delta$ için $hg = gh$. Böylece $g \in C_G(H)$ dir. ve buradan $G_\Delta \leq C_G(H)$ bulunur.

d) $h \in H$ ve $x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ olsun. O zaman Δ, G nin bloğu olduğundan $\Delta \cap x(\Delta) = \Delta \cap x^{-1}(\Delta) =$ Ø dır. $\forall\ i \in \Delta$ için $x(i) \notin \Delta$ ve $supp(H) \subseteq \Delta$ olduğundan $x(i) \notin supp(H)$ dir. Böylece $\forall h \in H$ ve $\forall i \in \Delta$ için $h(x(i)) = x(i)$ dir. O zaman

$x^{-1}hx(i) = i \Rightarrow x^{-1}hx \in G_{\Delta}$

O halde $H^x \leq G_{\Delta}$ dır. (c) den dolayı $G_{\Delta} \leq C_G(H) \Rightarrow H^x \leq C_G(H)$ dır. O halde $[H^x, H]=1$ dır.

e) $x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ için $H' \subseteq [H,x]$ olduğunu gösterelim. $w \in H'$ olsun. O zaman $w = [a,b]$ olacak şekilde $a,b \in H$ vardır. Ayrıca $x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ için (d) den $H^x \leq C_G(H)$ olduğundan $\forall a,b \in H$ için $(x^{-1}ax)b = b(x^{-1}ax)$ dir. o zaman;

$$w = [a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = (a^{-1}b^{-1}ab)x^{-1}axx^{-1}bxx^{-1}(ab)^{-1}x$$
$$= a^{-1}x^{-1}axb^{-1}x^{-1}bxabx^{-1}(ab)^{-1}x$$
$$= [a,x][b,x][(ab)^{-1},x] \in [H,x]$$

dır. O halde $H' \leq [H,x]$ dır.

Lemma 6.4:

Ω sonsuz, G, $FSym(\Omega)$ nın bir totally imprimitive alt grubu, $a \in \Omega$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

a) G_a nın her yörüngesi sonludur.

b) Eğer $K \leq G$ ve $K(a)$ sonlu ise o zaman $[K : K \cap G_a]$ sonludur.

İspat:

a) $H = G_a$ alalım. $b \in \Omega$ olsun. G totally imprimitive olduğundan sonlu blokların kesin artan sonsuz dizisi var. Bunların içinde a ve b yi aynı anda içeren bir Δ bloğunu alalım. o zaman $G_a \leq G_{\{\Delta\}}$ ve böylece ;

$H(b) = G_a(b) = \{g(b) : g(a) = a, g \in G\}$

$H(\Delta) = G_a(\Delta) = \{g(\Delta) : g(a) = a, g \in G\}$

O zaman $H(b) \subseteq H(\Delta) = \Delta$ bulunur. Δ sonlu olduğundan $H(b)$ sonludur.

b) $[K : K_a] = |K(a)| < \infty$ ve $K \leq G$ olsun. Eğer;

$g \in K \cap G_a \Leftrightarrow g \in K$ ve $g \in G_a \Leftrightarrow g \in K$ ve $g(a) = a \Leftrightarrow g \in K_a$

dır. O halde

$K_a = K \cap G_a$ dır. Böylece $[K : K \cap G_a] < \infty$ elde edilir.

Lemma 6.5:

$G \leq FSym(\Omega)$, F ,G nin sonlu bir alt grubu ve Δ , $supp(F) \subseteq \Delta$ olacak şekilde G nin bir bloğu olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

a) $U = \{u \in G_{\{\Delta\}} : supp(u) \subseteq \Delta\} \lhd G_{\{\Delta\}}$ ve $F \subseteq U$

b) $y \in G$ ve t, $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ olacak şekildeki en küçük pozitif tamsayı olsun. Kabul edelim ki y^t, F yi normallesin . O zaman

$F^{\langle y \rangle} = F \times F^y \times \ldots \times F^{y^{t-1}}$

dir.

İspat:

a) Önce $F \subseteq U$ olduğunu gösterelim. $f \in F$ için $supp(f) \subseteq supp(F) \subseteq \Delta$ *olduğundan* $supp(f) \subseteq \Delta$ *dir.*

Şimdi $i \in supp(f)$ *ise* $i \in \Delta$ ve $f(i) \neq i$ dır. Lemma 6.3 (a) nın ispatından $i \in supp(f)$ *ise* $f(i) \in supp(F)$, Δ blok ve $i, f(i) \in \Delta$ olduğundan

$f(\Delta) = \Delta \Rightarrow f \in G_{\{\Delta\}}$

dir. Böylece $f \in U$ ve $F \subseteq U$ dur.

Şimdi $U \lhd G_{\{\Delta\}}$ olduğunu gösterelim. $u, v \in U$ ve $x \in G_{\{\Delta\}}$ alalım.

$uv^{-1}(\Delta) = \Delta$ ise $uv^{-1} \in G_{\{\Delta\}}$ ve

$supp(uv^{-1}) \subseteq supp(u) \cup supp(v) \subseteq \Delta$

ve böylece $U \leq G_{\{\Delta\}}$. Şimdi $x \in G_{\{\Delta\}}$ için açıkça $x^{-1}ux \in G_{\{\Delta\}}$ ve

$\operatorname{supp}(x^{-1}ux) = x(\operatorname{supp}(u)) \subseteq x(\Delta) = \Delta$ dır. O halde $x^{-1}ux \in U$ dır. Böylece $U \lhd G_{\{\Delta\}}$

b) y^t, F yi normallesin. O zaman her $f \in F$ için $f^{y^t} = (y^t)^{-1} f y^t \in F$ dir. O zaman

$F^{\langle y \rangle} = \langle F, F^y, ..., F^{y^{t-1}} \rangle = \langle F^{y^k} : 0 \le k \le t-1 \rangle$

ve $y, y^2, ..., y^{t-1} \notin G_{\{\Delta\}}$ olduğundan Lemma 6.3 (d) den $0 \le k \le t-1$ için $F^{y^k} \le G_\Delta$ ve $[F, F^{y^k}] = 1$ ve böylece $F \cap \langle F^{y^k} : 1 \le k \le t-1 \rangle = 1$ dir. Burada F ile herhangi bir $1 \le k \le t-1$ için F^{y^k} yer değiştirirse sonuç aynı olur. Yani

$F^{y^k} \cap \langle F, F^y ...., F^{y^{k-1}}, F^{y^{k+1}}, ..., F^{y^{t-1}} \rangle = 1$

dir.Böylece $F^{\langle y \rangle} = F \times F^y \times ... \times F^{y^{t-1}}$ dir.

Lemma 6.6:

Ω sonsuz, *G, FSym(*Ω*)* nın geçişli bir alt grubu olsun. *F, G* nin sonlu abelyan olmayan alt grubu ve Δ , *supp(F)*$\subseteq \Delta$ olacak şekilde *G* nin bir öz bloğu olsun. Eğer *A,* $G_{\{\Delta\}}$ nın normal abelyan alt grubu ise o zaman

$\langle A^x : x \in G \rangle \le G_{\{\Delta\}}$

dır.

İspat:

$A, G_{\{\Delta\}}$ nın normal altgrubu olduğundan $\forall x \in G_{\{\Delta\}}$ için $A^x \le G_{\{\Delta\}}$ dır. O halde $x \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ olsun. O zaman $x^{-1} \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ dır. Lemma 6.3 (d) den $F^{x^{-1}} \le G_\Delta$ dır. $G_\Delta \le G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $F^{x^{-1}} \le G_{\{\Delta\}}$ ve böylece $F \le G^x_{\{\Delta\}}$ dir. Ayrıca $A \lhd G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $A^x \lhd G^x_{\{\Delta\}}$ dir. Kabul edelim ki $a \in A^x \setminus G_{\{\Delta\}}$ bulunsun. O zaman Lemma 6.3 (d) den $F' \le [F, a]$ dır. Ayrıca $F' \le F$ ve *supp(*F'*)*$\subseteq$*supp(*F*)*$\subseteq \Delta$ dir. Şimdi

$[f,a] \in [F,a]$ alalım. $a \in A^x$ olduğundan $a = x^{-1}bx$ olacak şekilde $b \in A$ var. O zaman $F^x \leq C_G(F)$ olduğundan

$[f,a] = f^{-1}a^{-1}fa = f^{-1}x^{-1}b^{-1}xfx^{-1}bx = f^{-1}x^{-1}xfx^{-1}b^{-1}bx = 1$

olur. $F' \leq [F,a] = 1 \Rightarrow F' = 1, F$ abelyan . Bu ise çelişkidir. O halde $A^x \leq G_{\{\Delta\}}$ dır.

Lemma 6.7:

Ω sonsuz, *G, FSym(*Ω*)* nın geçişli bir alt grubu ve *K, G* nin ascendant alt grubu olsun. Eğer K, Ω üzerinde sonsuz yörüngeye sahip ise o zaman *K, G* nin geçişli normal alt grubudur.

İspat:

Kabul edelim ki bir $i \in \Omega$ için *K(i)* sonsuz olsun fakat *K*, *G* de normal olmasın. O zaman *G* de öyle K_1, K_2 ascendant alt grupları vardır ki $K < K_1 < K_2$, $K \lhd K_1 \lhd K_2$ fakat K, K_2 de normal değildir. $K \lhd K_1$ olduğundan $K(i), K_1$ in $K_1(i)$ üzerine etkisi için bir bloktur. Böylece eğer $K(i) \neq K_1(i)$ ise o zaman öyle bir $x \in K_1$ vardır ki $x(K(i)) \cap K(i) = \emptyset$ ve böylece $K(i) \subseteq supp(x)$ dir ve $|supp(x)| < \infty$ olduğundan $|K(i)| < \infty$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde $K(i) = K_1(i)$. O zaman $K, K_1(i)$ üzerine geçişli etki eder. Benzer şekilde $K_1, K_2(i)$ üzerine geçişli etki eder. Yani $K_1(i) = K_2(i)$ dir. Buradan $K(i) = K_2(i)$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $K(i) = \Omega$ bulunur. Böylece K, Ω üzerine geçişli etki eder. K_1 ve K_2, *FSym(*Ω*)* nın geçişli alt grupları olduğundan $K \lhd K_1 \lhd K_2$ özelliğinden [4] den $K \lhd K_2$ bulunur bu ise çelişkidir.

Teorem 6.8:

Ω sonsuz, $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. *F, G* nin abelyan olmayan sonlu bir alt grubu ve Δ, $supp(F) \subseteq \Delta$ olacak şekilde bir öz blok olsun. *S*, $G_{\{\Delta\}}$ nın $d \geq 1$ uzunluklu normal çözülebilir bir alt grubu olsun. O zaman $\langle S^x : x \in G \rangle \neq G$ dir.

İspat:

Ω sonsuz bir küme ve $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. *F, G* nin abelyan olmayan sonlu bir alt grubu ve Δ, $supp(F) \subseteq \Delta$ olacak şekilde bir öz blok olsun. O zaman *G* ilkel değildir. *G* ya almost primitive ya da totally imprimitive dir. Önce *G* almost primitive olsun.

Kabul edelim ki Γ, $\Delta \subseteq \Gamma$ olacak şekilde *G* nin bir maksimal bloğu olsun.

$\Sigma = \{x(\Gamma) : x \in G\}$

olsun. *K, G* den $FSym(\Sigma)$ temsilinin çekirdeği olsun. O zaman (G/K),[3] den $Alt(\Sigma)$ veya $FSym(\Sigma)$ ye izomorftur. O zaman $(G/K)_\Gamma$ de $Alt(\Sigma \setminus \Gamma)$ veya $FSym(\Sigma \setminus \Gamma)$ ya izomorftur. Bundan başka

$(G/K)_\Gamma = G_{\{\Gamma\}}/K$

dir. Bundan dolayı $G_{\{\Gamma\}}/K$ basit grup $Alt(\Sigma \setminus \Gamma)$ ye izomorf ve indeksi ≤ 2 olan bir tek alt grup içerir. $G_{\{\Delta\}}$ nın $G_{\{\Gamma\}}$ de sonlu indeksi olduğundan $Alt(\Sigma \setminus \Gamma)$, $G_{[\Delta]}K/K$ nın bir altgrubuna izomorftur. Böylece $G_{\{\Delta\}}$ nın herhangi çözülebilir normal alt grubu *K* tarafından içerilir.

Şimdi *G*, totally imprimitive olsun. $H = G_{\{\Delta\}}$ olsun. Önce $G = G'$ olsun. *d* üzerine indüksiyon kullanalım. Lemma 6.6 den dolayı $d \leq 1$ için kabul doğrudur. O zaman $d > 1$ olsun ve kabul *d* çözülebilirlik uzunluğundan daha küçük uzunluklar için doğru olsun. O zaman

$L = \langle (S^{(d-1)})^x : x \in G \rangle$

olsun. Böylece $L \neq G$ dir. Lemma 6.6 dan $L \leq H$.

$\Lambda = \{x(\Delta) : x \in G\}$

olmak üzere *M, G* den $FSym(\Lambda)$ temsilinin çekirdeği ve $\overline{G} = G/M$ olsun. O zaman $L \leq M$. Açıkça $\overline{G}$, totally imprimitivedir ve $L \leq M$ olduğundan $\overline{S}$ nin uzunluğu *d* den küçüktür. $\overline{F_1}$, $\overline{G}$ nin abelyan olmayan bir alt grubu ve Γ, $\overline{G}$ nin $\Delta \subseteq \Gamma$ ve *supp(*$\overline{F_1}$*)* $\subseteq \Gamma$ olacak şekilde bir öz bloğu olsun. Γ sonlu olduğundan öyle

$1 = x_1, x_2, ..., x_r \in G$ vardır ki $\Gamma = \{x_1(\Delta), x_2(\Delta)..., x_r(\Delta)\}$ dır. $\Delta_1 = x_1(\Delta) \cup x_2(\Delta) \cup ... \cup x_r(\Delta)$

olsun. O zaman Δ_1, G nin bir bloğudur ve $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{G_{\{\Delta_1\}}}$ dir. $\overline{T} = \overline{G}_\Gamma$ olsun. O zaman $\overline{G}_{\{\Gamma\}} / \overline{T}$ bir sonlu gruptur ve $\forall i \geq 1$ için $\overline{T} \leq \overline{G}_{x_i(\Delta)}$ dır. Böylece $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ nin bir sonlu altgrubu $\overline{X}$ için $\overline{G}_{\{\Gamma\}} = \overline{X}\overline{T}$ dir. Böylece $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ bir FC-grup olduğundan $\overline{X}$, $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ de normal olarak kabul edebiliriz.

Şimdi $D_S = S \cap T$ olsun. $T \leq G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $D_S \lhd T$ ve S / D_S sonludur. $\overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X}) \lhd \overline{X}\overline{T} = \overline{G}_{\{\Gamma\}}$ ve $C_{\overline{T}}(\overline{X}) \cap \overline{T}$, $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ de sonlu indekse sahip olduğundan $[\overline{D_S} : \overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})]$ sonludur. $\overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})$ in uzunluğu d den küçük olduğundan indüksiyon hipotezi gereğince

$\overline{R} = \langle (\overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X}))^{\bar{x}} : x \in G \rangle \neq \overline{G}$

dir. $G = G'$ olduğundan Lemma 6.7 den R nin Ω üzerinde her yörüngesi sonludur. $\overline{T}$ ve $C_{\overline{T}}(\overline{X})$, $\overline{G}_{\{\Gamma\}}$ de sonlu indekse sahip olduğundan bir $m \geq 1$ için

$[\overline{G}_{\{\Gamma\}} : C_{\overline{T}}(\overline{X}) \cap \overline{T}] = m$

dir. Böylece

$[\overline{S} : \overline{S} \cap (C_{\overline{T}}(\overline{X}) \cap \overline{T})] = [\overline{S} : \overline{D_S} \cap C_{\overline{T}}(\overline{X})] \leq m$

ve

$\left| \overline{S}\overline{R} / \overline{R} \right| \leq m$

olur. G totally imprimitive olduğundan G öz normal alt gruplarının bir artan dizisinin birleşimidir. R nin her yörüngesi sonlu olduğundan , G nin bir N öz normal alt grubu vardır ki $\overline{R} \leq \overline{N}$ ve $\overline{S}\overline{R} / \overline{R} \leq \overline{N}$ dir. Açık olarak $\langle S^x : x \in G \rangle \neq G$ dir.

Şimdi kabul edelim ki $G' \leq G$ olsun. Eğer $G'S \neq G$ ise o zaman tamam. Öyleyse $G'S = G$ olsun. $W = G'$ ve $S_1 = S \cap W$ olsun. O zaman bir önceki paragraftan

$U = \langle {S_1}^x : x \in G' \rangle \neq W$

dir. U nun her yörüngesi sonlu olduğundan G nin Δ yı içeren $U \leq G_{\{\Pi\}}$ olacak şekilde bir Π öz bloğu vardır.

$Y = \{x(\Pi) : x \in G\}$

olmak üzere B, G den $FSym(Y)$ temsilinin çekirdeği ve $\overline{G} = G/B$ olsun.

$\overline{S}(\overline{H} \cap \overline{W}) = \overline{H} \cap \overline{S}\overline{W} = \overline{H} \cap \overline{G} = \overline{H}$ ve $\overline{S} \cap \overline{W} = 1$

olduğundan $\overline{S} \leq Z(\overline{H})$ dir. $V = G_{\{\Pi\}}$ olsun. O zaman $[V : H]$ sonludur. *A, H* tarafından içerilen V nin en geniş normal alt grubu olsun. O zaman *V/A* sonludur. $\overline{Z} = Z(\overline{A})$ olsun. O zaman $[\overline{S} : \overline{S} \cap \overline{Z}]$ sonludur. $\overline{Z} \lhd \overline{V}$ olduğundan eğer

$X = \langle Z^x : x \in G \rangle$

ise o zaman Lemma 6.6 den $\overline{X} \neq \overline{G}$. Şimdi $\overline{G}/\overline{X}$ göz önüne alalım. $\overline{S}\overline{X}/\overline{X} \cong S/S \cap X$ ve $[S : S \cap X] \leq [S : \overline{S} \cap \overline{Z}] < \infty$ olduğundan $\overline{S}\overline{X}/\overline{X}$ sonludur. $\overline{G}/\overline{X}$ de öz normal alt gruplarının artan birleşimidir. Böylece $\overline{S}\overline{X}/\overline{X}$, $\overline{G}/\overline{X}$ nin bir öz normal alt grubu tarafından içerilir. Bu da S nin , G nin bir öz normal alt grubu tarafından içerilmesi demektir.

Teorem 6.9:

Ω sonsuz, $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

a) Bir nokta dengeleyeni çözülebilir olamaz.

b) Eğer G normalleyen şartını sağlarsa o zaman G bir p-gruptur ve G' minimal non FC-gruptur.

İspat:

a) $\alpha \in \Omega$ ve G_α çözülebilir olsun. [3] den G ilkel olamaz.

Önce kabul edelim ki G almost primitive olsun. O zaman G nin α yı içeren bir maksimal bloğu Γ vardır. O zaman teorem 6.8 in ispatında olduğu gibi $\Sigma = \{x(\Gamma) : x \in G\}$ olmak üzere G/K, $Alt(\Sigma)$ veya $FSym(\Sigma)$ izomorf olacak şekilde K normal alt grubu vardır ve o zaman $(G/K)_\Gamma, Alt(\Sigma \setminus \Gamma)$ veya

$FSym(\Sigma \setminus \Gamma)$ ya izomorftur. Fakat $G_\alpha K / K$, $(G / K)_\Gamma$ de sonlu indekse sahip olduğundan bu bir çelişkidir.

Şimdi G totally imprimitive olsun. O zaman G nin bir abelyan olmayan F alt grubu ve $supp(F) \cup \{\alpha\} \subseteq \Delta$ olacak şekilde Δ öz bloğu vardır. Açık olarak G_α, $G_{\{\Delta\}}$ da sonlu indekse sahiptir ve böylece $G_{\{\Delta\}}$ sonlu indeksli bir normal çözülebilir S alt grubunu içerir. Teorem 6.8 den $M = \langle S^x : x \in G \rangle \neq G$ dir. $G_{\{\Delta\}} / M$ sonlu olduğundan $G_{\{\Delta\}}$, G nin bir öz normal alt grubu N tarafından içerilir. Özel olarak $G_\alpha \leq N$ dir. Bir $b \in \Omega$ için G_b ile G_α eşlenik olduğundan $G = \langle G_b : b \in \Omega \rangle \leq N$. Bu ise çelişkidir.

b) Kabul edelim ki G nin normallik şartını sağlasın olsun. O zaman Teorem 2.28 den G lokal-nilpotenttir ve böylece [6] den bir p asalı için p gruptur. Açıkça G' geçişlidir ve böylece [4] den mükemmeldir. H, G' nin bir öz alt grubu olsun. Eğer H nin her yörüngesi sonlu ise o zaman H bir FC-gruptur. O zaman bir $a \in \Omega$ için $H(a)$ sonsuz olsun. O zaman Lemma 6.7 den ve kabulden H , G de ascendant alt grup olduğundan H, G de normaldir. O zaman $H(a)$, G için bir bloktur ve $H(a)$ sonsuz olduğundan $H(a) = \Omega$ dır. Böylece H, Ω da geçişlidir. Fakat Lemma 6.2 den $G' \leq H$. Bu ise çelişkidir.

Teorem 6.10:

Ω sonsuz, $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

i) Eğer bir nokta dengeleyeni lokal-çözülebilir ise o zaman G, lokal çözülebilirdir.

ii) Eğer bir nokta dengeleyeni lokal nilpotent-by-çözülebilir ise o zaman G bir p asalı için p-gruptur.

İspat:

Ω sonsuz, $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. $a \in \Omega$ ve G_a i) ya da ii) yi sağlasın. O zaman Teorem 6.9 un ispatındaki gibi G ne ilkeldir ne de almost primitive dir. Böylece G yi totally imprimitive alabiliriz. O zaman $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ dır. $\forall k \geq 1$ için $N_k \lhd G$ olduğundan N_k nın her yörüngesi bir bloktur ve G totally imprimitive olduğundan N_k nın her yörüngesi sonludur.Dolayısıyla N_k FC-gruptur. Böylece Lemma 6.4 (b) den $\forall k \geq 1$ için $[N_k : N_k \cap G_a]$ sonludur. M_k, $N_k \cap G_a$ tarafından içerilen N_k nın en geniş normal alt grubu olsun. O zaman N_k / M_k sonludur.

i) G_a lokal-çözülebilir olsun. O zaman $M_k \leq G_a$ olduğundan M_k lokal-çözülebilirdir. Aslında M_k çözülebilirdir çünkü N_k giriş bölümünde açıklandığı gibi bir sonlu grubun izomorfik kopyalarının direkt çarpımının bir alt grubuna izomorftur. $\forall k \geq 1$ için N_k nın bütün normal çözülebilir alt gruplarının çarpımı S_k olsun. O zaman S_k, G de normaldir. Ve $M_k \leq S_k$ olduğundan $N_k S_k / S_k$ sonludur.

$S = \langle S_k : k \geq 1 \rangle$ olarak tanımlayalım. O zaman S lokal-çözülebilirdir. $S \lhd G$ ve

$$G / S = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k S / S$$

ve her bir $N_k S / S$ sonlu olduğundan G / S bir FC-gruptur. Bu durumda G / S sonsuz bir küme üzerindeki sonlu permütasyonların bir grubu olamaz. Ve böylece S geçişli olmalıdır. Bu da $G' \leq S$ demektir ve böylece G lokal-çözülebilirdir.

ii) G_α lokal nilpotent-by-çözülebilir olsun ve çözülebilirlik uzunluğu da $t \geq 0$ olsun. O zaman G, (i) den lokal çözülebilirdir. $\eta(G_\alpha)$, G_α nın Hirsch-Plotkin radikali olsun. O zaman $G_\alpha / \eta(G_\alpha)$ nın uzunluğu $\leq t$ dir ve çözülebilirdir. Açık olarak eğer G' lokal nilpotent ise G', Ω da geçişli olduğundan [6] ve [5] den iddia doğrudur. Böylece G' nün lokal nilpotent olduğunu göstermek yeter. Genelliği bozmadan $G = G'$ alabiliriz. G_α, çözülebilirlik uzunluğu t olan lokal nilpotent-by-çözülebilir ve $M_k \leq G_\alpha$ olduğundan $M_k / \eta(M_k)$ nın çözülebilirlik uzunluğu $\leq t$ olan çözülebilir gruptur. Ayrıca $\forall k \geq 1$ için $\eta(M_k) \leq \eta(N_k)$ dir.

$K = \langle \eta(N_k) : k \geq 1 \rangle$

olsun. O zaman *K, G* nin bir normal lokal nilpotent alt grubudur. Böylece eğer *K*, Ω üzerinde geçişli ise $G = G' \leq K$ ve böylece *G*, lokal nilpotenttir. Kabul edelim ki *K* geçişli olmasın. O zaman *K* nın her yörüngesi *G* nin sonlu bir bloğu olmalıdır. $a \in \Omega$, $\Delta = K(a)$ ve $\Sigma = \{x(\Delta) : x \in G\}$ olsun. *L, G* den $FSym(\Sigma)$ temsilinin çekirdeği olsun. O zaman $K \leq L$ dir.

$\overline{G} = G / L$

olsun. O zaman $\overline{G}, \Sigma$ üzerinde geçişlidir ve *G* lokal çözülebilir olduğundan $\overline{G}$ totally imprimitive dir.

$$\overline{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{N_k}$$

ve her $k \geq 1$ için $\overline{M_k}, \overline{N_k}$ nin çözülebilirlik uzunluğu $\leq t$ olan sonlu indekse sahip bir çözülebilir normal alt grubudur. Böylece her $\overline{N_k}$ uzunluğu $\leq t^2$ olan sonlu indekse sahip bir karakteristik alt grup içerir. Fakat $\overline{G}$ mükemmel olduğundan her $\overline{N_k}$ çözülebilirlik uzunluğu $\leq t^2 + 1$ olan çözülebilir gruptur. $\forall k \geq 1$ için ve böylece $\overline{G}$ çözülebilirdir. Bu ise çelişkidir.

Sonuç 6.11:

Ω sonsuz, $G, FSym(\Omega)$ nın geçişli alt grubu olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

a) Eğer bir nokta dengeleyeni lokal (nilpotent-by-abelyan) ise o zaman *G* bir p asalı için p-gruptur.

b) Eğer bir nokta dengeleyeni lokal supersoluble ise o zaman *G*, bir p asalı için p-gruptur.

İspat:

a) $\alpha \in \Omega$ olsun ve $H = G_\alpha$ olsun. Kabul edelim ki H lokal (nilpotent-by-abelyan) olsun. O zaman Teorem 6.10 (a) dan G lokal çözülebilirdir. Böylece Teorem 6.9 un ispatından G totally imprimitive dir ve dolayısıyla sayılabilir sonsuzdur.

$F_1 \le F_2 \le ... \le F_i \le ...$

dizisi birleşimleri H ye eşit olan H nin sonlu alt gruplarının bir artan zinciri olsun. Hipotezden $\forall i \ge 1$ için F_i' nilpotenttir.

$$H' = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i'$$

ve $\forall i \ge 1$ için $(F_i)' \le (F_{i+1})'$ olduğundan H' lokal nilpotent ve böylece H lokal nilpotent-by-abelyan dır. Böylece Teorem 6.10(b) den G bir p asalı için p-gruptur.

b) G_α supersoluble olsun. Bir supersoluble grup Lemma 2.32 den nilpotent-by-abelyandır. G_α bir lokal (nilpotent-by-abelyan) ve böylece (a) dan G, bir p asalı için p-gruptur.

Lemma 6.12:

Ω sonsuz, G, $FSym(\Omega)$ nın bir totally imprimitive alt grubu olsun ve A , G için bir üreteç alt küme olsun. O zaman öyle bir $a \in A$ vardır ki $\langle a \rangle^G$ abelyan değildir.

İspat:

Kabul edelim ki $\forall a \in A$ için $\langle a \rangle^G$ abelyan olsun. G nin abelyan olmayan alt grubu F, ve G nin $supp(F) \subseteq \Delta$ olacak şekilde bir Δ öz bloğu olsun. $\langle A \rangle = G$ ve $G_{\{\Delta\}} \ne G$ olduğundan bir $a \in A \backslash G_{\{\Delta\}}$ vardır. O zaman Lemma 6.3 den

$F' \le [F, a] \le \langle a \rangle^G$

ve böylece Lemma 6.3 (b) den $\langle a \rangle^G \le G_{\{\Delta\}}$ dır. Bu ise çelişkidir.

Lemma 6.13:

G, *FSym*(Ω) nın alt grubu, *F, G* nin bir alt grubu ve Δ, supp(F)$\subseteq\Delta$ olacak şekilde *G* nin bir öz bloğu olsun. $y \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ ve t, $y^t \in G_{\{\Delta\}}$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı olsun. Kabul edelim ki $y^t \in FC_G(F)$ olsun. O zaman öyle bir $x \in F$ vardır ki $(yx^{-1})^t \in C_G(F)$ ve *t* bu özelliğe sahip en küçük pozitif tamsayıdır.

İspat:

Hipotezden öyle bir $h \in F$ ve $c \in C_G(F)$ var öyle ki $y^t = ch$. Ayrıca

$\Delta, y(\Delta),..., y^{t-1}(\Delta)$

t nin seçiminden dolayı ikişer ikişer ayrıktır. $x \in F$ ve $i \in \Delta$ olsun. İddia ediyoruz ki her $1 \le k \le t$ için

$(yx)^k(i) = y^k(x(i))$

dir. Bunu indüksiyon hipoteziyle gösterelim.

Kabul edelim ki $1 \le k < t$ için doğru olsun. O zaman $y^k(x(i)) \notin \Delta$ ve *supp(F)*$\subseteq\Delta$ olduğundan $x(y^k(x(i))) = y^k(x(i))$ dir. Böylece

$(yx)^{k+1}(i) = (yx)((yx)^k(i)) = (yx)(y^k(x(i))) = y(y^k(x(i))) = y^{k+1}(x(i))$

Böylece indüksiyon tamamlanır. Şimdi $k = t$ ve $x = h^{-1}$ olsun. O zaman

$(yh^{-1})^t(i) = y^t(h^{-1}(i)) = (y^t h^{-1})(i) = c(i)$.

i, Δ nın herhangi elemanı olduğundan

$(yh^{-1})^t \big|_\Delta = c \big|_\Delta$

Böylece $d \in FSym(\Omega \setminus \Delta)$ olmak üzere

$(yh^{-1})^t = (c\,\big|_\Delta)d$

dir. Buradan $(yh^{-1})^t \in C_G(F)$ dir.

Şimdi t nin bu özelliğe sahip en küçük pozitif tamsayı olduğunu gösterelim. Teoremin hipotezleri sağlansın ve kabul edelim ki bir $k < t$ için öyle bir $x \in F$ olsun ki $(yx^{-1})^k \in C_G(F)$ olsun. O zaman $\forall f \in F$ için $(yx^{-1})^k f = f(yx^{-1})^k$ dır.

$(yx^{-1})^k = z$ olsun. O zaman $\forall f \in F$ için *zf=fz* ve böylece $z^{-1}fz = f$ dir. Ayrıca $z(\Delta) \cap \Delta = \text{Ø}$ dir. Buradan

supp(f) $\subseteq$ *supp(F)* $\subseteq \Delta$ $\Rightarrow$ *supp(f)* $\subseteq \Delta$

$\Rightarrow$ *supp*$(z^{-1}fz) \subseteq \Delta$

$\Rightarrow z\,$*supp(f)* $\subseteq \Delta$

$\Rightarrow$ *supp(f)* $\subseteq z^{-1}(\Delta)$

ve böylece *supp(f)* $\subseteq \Delta \cap z^{-1}(\Delta) = \text{Ø}$ olur. Bu ise çelişkidir.

Teorem 6.14:

Ω sonsuz, *G*, *FSym*(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki *G* nin her normal olmayan sonlu *F* alt grubu için bir $y \in G \setminus N_G(F)$ olsun öyle ki $y^p \in C_G(F)$ olsun. O zaman *G* nin sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grubu vardır.

İspat:

Ω sonsuz olmak üzere *G*, *FSym*(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki *G* nin her öz alt grubunun her yörüngesi sonlu olsun ve *G* nin her normal olmayan sonlu *F* alt grubu için bir $y \in G \setminus N_G(F)$ olsun öyle ki $y^p \in C_G(F)$ olsun. Lemma 6.12 den bir $c_1 \in G$ için $\langle c_1 \rangle^G$ abelyan değildir.

$F_1 = \langle c_1 \rangle$

olsun. Ve Λ_1 de $supp(F_1)$ i içeren *G* nin öz bloğu olsun. U_1, F_1 in $G_{\{\Lambda_1\}}$ içindeki normal kapanışı olsun. O zaman Lemma 6.5 (a) dan supp(U_1)$\subseteq \Lambda_1$ dir ve ayrıca Lemma 6.3 (a) dan $N_G(U_1) = G_{\{\Lambda_1\}}$ dir. Hipotezden öyle bir $c_2 \in G \setminus G_{\{\Lambda_1\}}$ var öyle ki ${c_2}^p \in C_G(U_1)$. Özel olarak $F_1 \subseteq U_1$ olduğundan ${c_2}^p$, F_1 i merkezler. Böylece Lemma 6.5 (b) den

$F_1^{\langle c_2 \rangle} = \langle c_1 \rangle \times \langle c_1 \rangle^{c_2} \times \ldots \times \langle c_1 \rangle^{{c_2}^{p-1}}$

Şimdi $F_2 = F_1^{\langle c_2 \rangle} \langle c_2 \rangle = \langle F_1, c_2 \rangle$ olsun. Λ_2, $supp(F_2)$ yi içeren blok ve U_2, F_2 nin $G_{\{\Lambda_2\}}$ deki normal kapanışı olsun. O zaman birinci durumdaki gibi öyle bir $c_3 \in G \setminus G_{\{\Lambda_2\}}$ var öyle ki $c_3{}^p \in C_G(U_2)$ ve böylece

$$F_2^{\langle c_3 \rangle} = F_2 \times F_2^{c_3} \times \ldots \times F_2^{c_3{}^{p-1}}$$

dir. Şimdi

$$F_3 = F_2^{\langle c_3 \rangle} \langle c_3 \rangle = \langle F_2, c_3 \rangle$$

olsun. Bu şekilde devam ederek artan

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$$

blok dizisini ve

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots$$

alt grup dizisini elde ederiz. $\forall i \geq 1$ için Λ_i ler öz bloklar ve

$$F_i = \langle c_1, c_2, \ldots, c_i \rangle$$

G nin $c_{i+1} \in G \setminus G_{\{\Lambda_i\}}$ olacak şekilde sonlu alt grupları olur. Açıkça $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$ dir.

Kabul edelim ki $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ olsun. Açıkça c_i nin seçiminden F nin $supp(c_1)$ in herhangi bir elemanını içeren yörüngesi sonsuz olduğundan *F=G* dir.

Şimdi iddia ediyoruz ki $\langle c_1 \rangle^F$ abelyandır. $\forall i \geq 1$ için $\langle c_1 \rangle^{F_i}$ nin abelyan olduğunu göstermek yeter. i=1 için $F_1 = \langle c_1 \rangle$ olduğundan açıktır. Kabul edelim ki $i \geq 1$ için doğru olsun. $i+1$ için doğruluğunu göstermeliyiz. Kabulden $\langle c_1 \rangle^{F_i}$ abelyan olduğundan

$$F_{i+1} = (F_i^{\langle c_{i+1} \rangle}) \langle c_{i+1} \rangle \text{ ve } F_i^{\langle c_{i+1} \rangle} = F_i \times F_i^{c_{i+1}} \times \ldots \times F_i^{c_{i+1}{}^{p-1}}$$

Böylece F_{i+1} i ,

$$F_{i+1} = (F_i \times F_i^{c_{i+1}} \times \ldots \times F_i^{c_{i+1}{}^{p-1}}) \langle c_{i+1} \rangle$$

olarak yazabiliriz. Şimdi $x, y \in F_{i+1}$ olsun. $[c_1{}^x, c_1{}^y] = 1$ olduğunu göstermek yeter. Öyle $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ ve $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1} \in F_i$ vardır ki $0 \leq r, s \leq p-1$ için

$x=(a_0 a_1^{c_{i+1}} ... a_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}}) c_{i+1}^r$ ve $y=(b_0 b_1^{c_{i+1}} ... b_{p-1}^{c_{i+1}^{p-1}}) c_{i+1}^s$

dir. $c_1^{a_0} \in F_i$ olduğundan ve bir $1 \le u \le p-1$ için Lemma 6.3 (d) den $[F_i, F_i^{c_{i+1}^u}]=1$ olduğundan $c_1^x = c_1^{a_0 c_{i+1}^r}$ dir. Benzer şekilde $c_1^y = c_1^{b_0 c_{i+1}^s}$ dir. $0 \le r,s \le p-1$ olduğundan $r \ne s$ ise Lemma 6.3 (d) den $[F_i^{c_{i+1}^r}, F_i^{c_{i+1}^s}]=1$ dir ve buradan $[c_1^x, c_1^y]=1$ dir. Eğer $r=s$ ise o zaman $[c_1^x, c_1^y]=[c_1^{a_0}, c_1^{b_0}]^{c_{i+1}^r}=1$ dir. Böylece indüksiyon tamamlanır, ve $\langle c_1 \rangle^{F_i}$ abelyandır. Fakat $\langle c_1 \rangle^G$ abelyan olmadığından *F=G* olmasıyla çelişir.

Sonuç 6.15:
Ω sonsuz olmak üzere *G*, *FSym*(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki *G* nin her normal olmayan sonlu *F* alt grubu için bir $y \in G \setminus N_G(F)$ olsun öyle ki $y^p \in FC_G(F)$ olsun. O zaman *G* sonsuz yörüngeli bir öz alt grup içerir.

İspat:
F, G nin normal olmayan sonlu alt grubu olsun. ve Δ, *supp(F)*$\subseteq \Delta$ olacak şekilde *G* nin bir minmal bloğu olsun. Lemma 6.3 (b) den $N_G(F) \le G_{\{\Delta\}}$ dır. Böylece hipotezden öyle bir $y \in G \setminus G_{\{\Delta\}}$ vardır ki $y^p \in FC_G(F)$. Lemma 6.13 den öyle bir $x \in F$ vardır ki $(yx)^p \in C_G(F)$ dir. Ayrıca $x \in G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $yx \notin G_{\{\Delta\}}$ dır. Böylece Lemma 6.3 den $N_G(F) \le G_{\{\Delta\}}$ olduğundan $(yx)^p \in C_G(F)$ fakat $yx \notin N_G(F)$ dir. *F, G* nin herhangi bir sonlu normal olmayan alt grubu olduğundan Teorem 6.14 uygulanarak *G* nin sonsuz yörüngeye sahip bir alt grubu elde edilir.

Sonuç 6.16:
Ω sonsuz olmak üzere *G*, *FSym*(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki *G* nin öz bloklarının sonsuz artan bir dizisi
$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset ... \subset \Delta_k \subset ...$

olsun öyle ki: $\forall k \geq 1$ için $F_k = \{x \in G : \mathrm{supp}(x) \subset \Delta_k\}$ olmak üzere $\langle F_k{}^x : x \in G \rangle$, $G_{\{\Delta_k\}}$ tarafından içerilen G nin en geniş normal alt grubu olsun. O zaman *G* sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir.

İspat:

$k \geq 1$ ve H=$G_{\{\Delta_k\}}$ olsun. $\Sigma = \{x(\Delta_k) : x \in G\}$ olmak üzere M_k, G den $FSym(\Sigma_k)$ temsilinin çekirdeği olsun. O zaman M_k, H tarafından içerilen G nin en geniş normal alt grubudur ve böylece hipotezden $M_k = \langle F_k^G \rangle$ dir.

$\overline{G} = G / M_k$

olsun. R, $\overline{R} \neq 1$ olacak şekilde G nin bir öz normal alt grubu olsun. $\overline{R}$, nilpotent olduğundan $Z(\overline{R}) \neq 1$ dir. Ve buradan $\Omega_1(Z(\overline{R})) \neq 1$ M_k nın tanımından $\Omega_1(Z(\overline{R}))$, $\overline{H}$ tarafından içerilmez. $o(\overline{z}) = p$ olacak şekilde $\overline{z} \in \Omega_1(Z(\overline{R}))$ \H alalım. O zaman $z \notin H$ fakat $z^p \in M_k$ dır.

$$M_k = \langle F_k \rangle^G = \prod_{x \in G} F^x \leq F_k G_{\Delta_k}$$

olduğundan $z^p \in F_k C_G(F_k)$ dır. Şimdi *F, G* nin herhangi bir sonlu normal olmayan alt grubu olsun. *supp(F)*$\subseteq \Delta_k$ olacak şekilde $k \geq 1$ vardır. Ve yukarıdaki paragraftan öyle bir $y \in G \setminus N_G(F)$ vardır ki $y^p \in FC_G(F)$ dir. Sonuç 6.15 den *G* sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir.

Sonuç 6.17:

Ω sonsuz olmak üzere *G*, *FSym*(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki *G* nin öz bloklarının sonsuz artan bir dizisi

$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset ... \subset \Delta_k \subset ...$

olsun öyle ki: $\forall k \geq 1$ için öyle bir $y_k \in G \setminus G_{\Delta_k}$ vardır ki $\langle y_k \rangle \cap G_{\{\Delta_k\}} \leq G_{\Delta_k}$ olsun. O zaman *G* sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir.

İspat:

F, G nin herhangi bir sonlu normal olmayan alt grubu olsun. O zaman bir $k \geq 1$ için *supp(F)* $\subseteq \Delta_k$ dır. Hipotezden öyle bir $y_k \in G \setminus G_{\Delta_k}$ vardır ki $y^p \in G_{\Delta_k} \leq C_G(F)$ dir. $N_G(F) \leq G_{\{\Delta_k\}}$ olduğundan Teorem 6.14 in hipotezleri sağlanır. Ve böylece *G* sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir.

Sonuç 6.18:

Ω sonsuz olmak üzere *G*, FSym(Ω) nın bir totally imprimitive p-altgrubu olsun. Kabul edelim ki

$G = \langle x \in G : x^p = 1 \rangle$

olsun. O zaman *G* bir minimal non FC-grup olamaz.

İspat:

Kabul edelim ki *G* bir minimal non FC-grup olsun. O zaman *G* nin her öz alt grubunun her yörüngesi sonludur. $X = \{x \in G : x^p = 1\}$ olsun. ve $G = \langle X \rangle$ olsun.

$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_k \subset \ldots$

G nin öz bloklarının bir sonsuz artan dizisi olsun. hipotezden $\forall k \geq 1$ için öyle bir $x \in X$ vardır ki $x \in G \setminus \mathrm{G}_{\{\Delta_k\}}$ ve $\langle x \rangle \cap \mathrm{G}_{\{\Delta_k\}} = 1$. Fakat o zaman Sonuç 6.17 den dolayı *G* sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir. Bu ise çelişkidir.

Uyarı 6.19:

İndüksiyonla Sonuç 6.18 deki *G* grubu sonlu eksponentli bir alt küme tarafından içerilmez.

Teorem 6.20:

G bir lokal sonlu p-grubu ve aynı zamanda bir minimal non FC-grup olsun. Kabul edelim ki *G* nin her sonlu normal olmayan *F* alt grubu için öyle bir $y \in G \setminus N_G(F)$ olsun öyle ki $y^p \in FC_G(F)$ olsun. O zaman *G* mükemmel olamaz.

İspat:

G bir lokal sonlu p-grubu ve aynı zamanda bir minimal non FC-grup olsun. . O zaman G nin her öz alt grubu bir FC-gruptur. Kabul edelim ki G mükemmel olsun ve teoremdeki hipotezleri sağlasın. O zaman $Z(G/Z(G))=1$ dir.

$\overline{G}=G/Z(G)$ olsun. O zaman $Z(\overline{G})=1$ dir. G lokal nilpotent olduğundan, $\overline{N}\neq 1$, olacak şekilde bir $\overline{N}$ öz normal alt grubu vardır. O zaman $Z(\overline{N})\neq 1$ dir. $o(\overline{a})=p$ olacak şekilde bir $\overline{a}\in Z(\overline{N})$ seçebiliriz. $\Omega=\{(\overline{a})^{\overline{x}}:x\in G\}$ alalım. G , FC-grup olmadığından Ω sonsuzdur ve $\overline{G}$ nin Ω üzerine eşlenik etkisi bir finitary permütasyon grup tanımlar. K, bu etkinin çekirdeği olsun. O zaman $\overline{G}/\overline{K}$, $FSym(\Omega)$ nın bir totally imprimitive p-altgrubuna izomorftur. $\overline{G}/\overline{K}\cong G/K$ olduğundan $\overline{G}/\overline{K}$ yerine G/K alabiliriz.

Şimdi G/K nın Sonuç 6.15 in hipotezini sağladığını gösterelim. Teoremin hipotezinden G nin her normal olmayan sonlu F alt grubu için öyle bir $y\in G\setminus N_G(F)$ olsun öyle ki $y^p\in FC_G(F)$ olsun. X/K, G/K nın bir sonlu normal olmayan alt grubu ve T, X in $X=TK$ olacak şekilde bir sonlu alt grubu olsun. Δ, G/K nın $supp(X/K)\subseteq\Delta$ olacak şekilde bir öz bloğu olsun. $L/K=(G/K)_{\{\Delta\}}$ alalım. V, T nin L içindeki normal kapanışı olsun. O zaman V, L nin bir sonlu normal alt grubudur ve $X\leq VK$ dir. Böylece $supp(VK/K)\subseteq\Delta$ olduğundan Lemma 6.3 (a) dan $L/K=N_{L/K}(VK/K)$. Özel olarak $N_G(V)=L$ dir. Hipotezden bir $y\in G\setminus L$ vardır ki $y^p\in VC_G(V)$ dir. O zaman $X/K\leq VK/K$ olduğundan $yK\notin L/K$ fakat $y^pK\in(VK/K)C_{G/K}(X/K)$. Böylece G/K Sonuç 6.15 in hipotezini sağlar. Fakat o zaman G/K sonsuz yörüngeye sahip bir öz alt grup içerir. Bu ise G/K nın minimal non FC-grup olmasıyla çelişir.

KAYNAKLAR

[1] Asar, A.O., ‘On Finitary Permutation Groups’, ***Turk J. Mat***., 30: 101-116 (2006).

[2] Robinson, D.J.S., ‘A Course In The Theory Of Groups’, ***Springer-Verlag***, New York , 343-350 (1996).

[3] Dixon, J.D., Mortimer, B.,’Permutation Groups’, New York, Heidelberg, Berlin, ***Springer-Ferlag***: 255-264 (1980).

[4] Neumann, P. M.’The structure of finitary permutation groups’, ***Arch. Math***., 27: 3-17 (1976).

[5] Pinnock, C. J. E.,’Irreducible and transitive locally-nilpotent by abelian groups’, ***Arch. Math***. , 74: 168-172 (2000).

[6] Suprunenko, D. A.,’Locally nilpotent subgroups of infinite symmetric groups’, ***Soviet Math*. Dokl.** , 7:392-394 (1966).

[7] Arıkan, A.,’On barely transitive p-groups with soluble point stabilizer’, ***J. Group Theory*** , 5: 441-442 (2002).

[8] Belyaev, V.V.,’On the question of existence of minimal non FC-groups’, ***Siberian Math .J.39***: 1093-1095 (1998).

[9] Belyaev, V.V., Kuzucuoğlu, M.,’Locally finite barely transitive groups’, ***Algebra and Logic*** , 42:147-152 (2003).

[10] Hartly, B., Kuzucuoğlu, M.,’Non-simplicity of locally finite barely transitive groups’, ***Proceeding of the Edinburg Math. Soc.,*** 40:483-490 (1997).

[11] Kuzucuoğlu, M.,’On torsion-free barely transitive groups’, ***Turk. J. Math.***, 24:273-276 (2000).

[12] Leinen, F.,’A reduction theorem for perfect locally finite minimal non FC-groups’, ***Glasgow Math.,*** J. 4:81-83 (1999).

[13] Leinen, F.,Puglisi, O.,’Finitary representations and images of transitive finitary permutation groups’, ***J. Algebra*** , 222:524-549 (1999).

[14] Neumann, P. M.,’The lawlessness of groups of finitary permutations’, ***Arch. Math.,*** 26:561-566 (1975).

[15] Segal,D.,’Normal subgroups of finitary permutation groups’, ***Math. Z.,*** 140:81-85 (1974).

[16] Wiegold, J.,’Groups of finitary permutations’,***Arch. Math.*** , 25:466-469 (1974).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: AYDIN, Yıldız
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 10.11.1980 Çorum
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (364) 226 45 62
e-mail	: yildizaydin60@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Öğretmenliği	2003
Lise	Çorum Anadolu Öğretmen Lisesi	1998

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Tenis, Bilgisayar teknolojileri