GENELLEŞTİRİLMİŞ MEYER-KÖNIG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI

Nursel ÇETİN

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2009
ANKARA

Nursel ÇETİN tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ MEYER-KÖNIG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Hatice GÜL İNCE İLARSLAN ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL ……………………………….
Matematik A.B.D., Gazi Üniversitesi
Yrd. Doç. Dr. Hatice GÜL İNCE İLARSLAN ……………………………….
Matematik A.B.D., Gazi Üniversitesi
Doç. Dr. Gülen TUNCA ……………………………….
Matematik A.B.D., Ankara Üniversitesi

Tarih : 19 / 01 / 2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nursel ÇETİN

GENELLEŞTİRİLMİŞ MEYER-KÖNIG VE ZELLER OPERATÖRLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIMI

(Yüksek Lisans Tezi)

Nursel ÇETİN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2009

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, pozitif lineer operatörler, süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli, Lipschitz sınıfı, istatistiksel yakınsaklık ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılıp bunlara ilişkin bazı bilinen sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, pozitif lineer operatör dizileri için reel sayıların keyfi bir aralığı üzerinde A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak genel bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Dördüncü bölümde, Agratini operatörleri incelendikten sonra, A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genellemesi verilerek bu operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı ve A-istatistiksel yakınsama hızları hesaplanmıştır.

Altıncı bölümde, bilinen operatörlerin integral tipli genellemelerini içeren pozitif lineer operatörler dizisinin genel hali ifade edilip, A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bu operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel yakınsama hızları ve r-inci basamaktan genelleştirilmesi verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095
Anahtar Kelimeler : A-istatistiksel yakınsaklık, lineer pozitif operatörler, Korovkin teoremi, Meyer-König ve Zeller operatörü, Süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, Peetre K-fonksiyoneli
Sayfa Adedi : 72
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Hatice GÜL İNCE İLARSLAN

STATISTICAL APPROXIMATION BY GENERALIZED MEYER-KÖNIG AND ZELLER TYPE OPERATORS

(M.Sc. Thesis)

Nursel ÇETİN

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2009

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, the concepts of positive linear operators, modulus of continuity, Peetre's K-functional, Lipschitz class, statistical convergence and A-statistical convergence have been recalled and some known results concerning them have also been considered. In the third chapter, using A-statistical convergence, Korovkin type approximation theorem for positive linear operators have been given on an arbitrary interval I of IR. In the fourth chapter, A Kantorovich type generalization of Agratini's operators have been introduced and using A-statistical convergence, the approximation properties of Agratini's operators have been studied. In the fifth chapter, A Kantorovich integral type generalization of Agratini's operators and a statistical approximation result for these operators have been given. Also, the rates of A-statistical approximation for the operators have been investigated. In the sixth chapter, Korovkin type theorems for a general sequence of positive linear operators including many integral type generalizations of well known operators via the concept of statistical convergence.

After that, the rates of statistical convergence and the approximation properties of the r-th order generalization of these operators have been dealt with.

Science Code : 204.1.095
Key Words : A-statsitical convergence, Positive linear operators, Korovkin theorem, the Meyer-König and Zeller operators, Modulus of continuity, Lipschitz class, Peetre's K-functional.
Page Number : 72
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Hatice GÜL İNCE İLARSLAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hatice GÜL İNCE İLARSLAN'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

1. GİRİŞ

Yaklaşım Teorisi, polinomların yaklaşımında, Fonksiyonel Analizin çeşitli alanlarında, diferensiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümlerinde önemli uygulamalara sahiptir. Korovkin tipi teoremler de yaklaşım teorisinde temel oluşturmaktadır [Korovkin 1960, Devore 1992, Altomare ve Campiti 1994]. Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında reel sayıların kapalı ve sınırlı aralıkları üzerinde sürekli olan fonksiyonların uzayı üzerinde tanımlanan pozitif lineer operatörler için istatistiksel yakınsaklık yardımıyla bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir.

Klasik yaklaşım operatörlerinin çoğu yaklaşılan fonksiyon değerine yakınsar. Bununla birlikte, süreksizlik noktalarında bu operatörlerin genellikle fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamasına yakınsadığı görülür. Fakat Hermit-Fejer yaklaşım operatörleri gibi bazı istisnai durumlar da vardır [Bojanic ve Cheng 1983, Bojanic ve Khan 1992]. Bu operatörler basit süreksizlik noktalarında yakınsak değildir. Bu durumlarda bu yakınsaklık kaybını gidermek için Cesáro tipi toplanabilme metotlarını kullanmak bizi daha güçlü sonuçlara götürür. Son yıllarda matris gösterimine sahip olmayan bir başka regüler toplanabilme yönteminin sınırsız alt dizilere sahip yakınsak olmayan bazı dizileri toplamada ne kadar etkili olduğu gösterilmiştir [Freedman ve Sember 1981, Fridy 1985]. Bu yöntem A-istatistiksel yakınsaklık yöntemi olup hazırlanan bu tez çalışmasında bu yöntemi yaklaşım teorisi içinde incelemek amaçlanmaktadır. Bu sebeple, öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılıp, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve özellikler ifade edilmiştir. Ayrıca yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılarak bu kavramların A-istatistiksel benzerleri verilmiştir.

Daha sonra A-istatistiksel yakınsaklığı kullanarak pozitif lineer operatör dizileri için reel sayıların keyfi bir I aralığı üzerinde daha genel Korovkin tipi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Agratini operatörleri ile Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli genellemesi verilerek bu operatörlerin yaklaşım özellikleri ve A-istatistiksel yakınsama hızları incelenmiştir.

Son olarak bilinen pozitif lineer operatörlerin integral tipli genellemelerini içeren operatörler dizisinin genel hali ifade edilip A-istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin tipi sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, pozitif lineer operatör dizileri için bulduğumuz bu yaklaşımın A-istatistiksel hızları hesaplanmıştır. Son olarak, bu operatörlerin r-inci basamaktan genelleştirilmesi verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım, lemma, teorem ve notasyonlar verilecektir.

2.1. Pozitif Lineer Operatörler

2.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y üzerinde bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralına X uzayında bir "operatör" adı verilir ve L operatörünün x noktasındaki değeri $L(f;x)=g(x)$ şeklinde gösterilir.

Burada $L(f;x)=L(f(t);x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur.

2.2. Tanım

X lineer bir uzay ve $L: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in IR$ için

$$L(\alpha f+\beta g;x)=\alpha L(f;x)+\beta L(g;x)$$

koşulu sağlanıyorsa, bu durumda L operatörüne "lineer operatör" denir.

2.3. Tanım

L bir lineer operatör olsun. Eğer X tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f;x) \geq 0$ gerçekleniyorsa L operatörüne "pozitif lineer operatör" denir.

2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \le g \Rightarrow L(f) \le L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. Lemma

L bir lineer pozitif operatör ise bu takdirde

$$|L(f)| \le L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.4. Tanım

IN doğal sayılar kümesini göstermek üzere, $n \in IN$ için $L_n(f;x)$ e bir “operatör dizisi” denir ve (L_n) ile gösterilir.

2.5. Tanım

$X \subset IR$ olsun. X üzerinde tanımlı, sürekli ve reel değerli fonksiyonların oluşturduğu küme $C(X)$ ile gösterilir. Özel olarak $a, b \in IR$ için X=[a,b] alınırsa C[a,b] uzayı

$$\| f(x) \|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} | f(x) |$$

normu ile bir normlu uzaydır.

2.6. Tanım

(f_n) , C[a,b] üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{C[a,b]} = 0$$

ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \overrightarrow{\to f}$ şeklinde gösterilir.

2.7. Tanım

$D \subset IR$ olsun. $p \geq 1$ olmak üzere

$$L_p(D) := \left\{ f : \int_D | f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $L_p(D)$ uzayı üzerindeki norm $f \in L_p(D)$ için

$$\| f \|_{L_p(D)} = \left\{ \int_D | f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

2.8. Tanım

$D \subset IR$ olsun. $p \geq 1$ olmak üzere
$$L_p^2(D) : = \left\{ f : f, f', f'' \in L_p(D) \right\}$$

dir. $L_p^2(D)$ uzayı üzerinde tanımlı norm $f \in L_p^2(D)$ için

$$\| f \|_{L_p^2(D)} = \| f \|_{L_p(D)} + \| f' \|_{L_p(D)} + \| f'' \|_{L_p(D)}$$

şeklindedir.

2.9. Tanım (Süreklilik Modülü)

$f \in C(I)$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t \in I \\ |t-x| \le \delta}} | f(t) - f(x) | \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $w(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun "süreklilik modülü" denir [Korovkin 1960 ve Devore 1972].

2.3. Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $w(f;\delta) \ge 0$

(ii) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $w(f;\delta_1) \le w(f;\delta_2)$

(iii) $m \in IN$ için $w(f;m\delta) \le m w(f;\delta)$

(iv) $\lambda \in IR^+$ için $w(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda) w(f;\delta)$

(v) $f \in C[a,b]$ için $\lim_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$

(vi) $| f(t) - f(x) | \le w(f; | t - x |)$

(vii) $| f(t) - f(x) | \le \left(1 + \frac{| t - x |}{\delta}\right) w(f;\delta)$

2.10. Tanım (Peetre K-Fonksiyoneli)

$$K_P(f;\delta) = \inf_{g \in L_p^2(D)} \{ \| f - g \|_{L_p(D)} + \delta \| g \|_{L_p^2(D)} \} \tag{2.2}$$

ile tanımlanan $K_P(f;\delta)$ ifadesine $f \in L_p(D)$ fonksiyonunun Peetre K-fonksiyoneli denir [Bleimann, Butzer ve Hahn,1980].

2.11. Tanım (Lipschitz Sınıfı)

$M > 0$, $\alpha \in (0,1]$ ve $f \in C(I)$ olsun. $\forall x, y \in I$ için

$$| f(y) - f(x) | \leq M | y - x |^{\alpha} \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna Lipschitz sınıfındandır denir. Burada Lipschitz sınıfı $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir [Altomare ve Campiti, 1994].

2.1. Teorem (P.P. Korovkin Teoremi)

$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatör olmak üzere (L_n) bir lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) Her $f \in C[a,b]$ için $\lim_n \| L_n(f) - f \|_{C[a,b]} = 0$

ii) $f_i(y) = y^i$, $i = 0,1,2$ olmak üzere $\lim_n \| L_n(f_i) - f_i \|_{C[a,b]} = 0$

[Korovkin, 1960].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

2.12. Tanım

$K \subseteq IN$ olmak üzere K kümesinin eleman sayısı (kardinali) $|K|$ ile gösterilsin ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} \tag{2.4}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [Niven ve Zuckerman 1980].

(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in IN\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dir.

Örneğin, $\delta(IN) = 1$, $\delta\{k^2 : k \in IN\} = 0$, $\delta\{2k+1 : k \in IN\} = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından kolayca görülebilir. $\delta(K)$ ve $\delta(IN \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(IN \setminus K)$ dır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır [Niven ve Zuckerman 1980, Freedman ve Sember 1981].

2.1. Uyarı

$K \subseteq IN$ olmak üzere K kümesinin karakteristik dizisi,

$$\left(\chi_K\right)_j = \begin{cases} 0\,, & j \notin K \text{ ise} \\ 1\,, & j \in K \text{ ise} \end{cases}$$

ve $C_1 = \left(c_{nk}\right)$ Cesáro matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,, & k \le n \ \text{ ise} \\ 0\,, & k > n \ \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere Eş. 2.4 ifadesi

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in K} \frac{1}{n}\, 1 = \lim_{n\to\infty} \left(C_1 \chi_K\right)_n$$

ile verilebilir.

Şimdi yoğunluk kavramından esinlenerek istatistiksel yakınsaklık tanımı verilebilir.

2.13. Tanım

$\forall\, \varepsilon > 0$ sayısı için $K := K(\varepsilon) := \left\{ k \in IN : \left| \, x_k - L \, \right| \ge \varepsilon \right\}$ kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| x_k - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = \left(x_k\right)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $\text{st-lim}\,x = L$ ile gösterilir [Steinhaus 1951, Fast 1951, Fridy 1985].

Burada istatistiksel yakınsaklık ile Cauchy anlamında yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Bilindiği gibi, x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise L nin her bir ε komşuluğunun dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanların sonlu sayıda olması, böyle elemanların yoğunluğunun sıfır olması demektir. Bu da Cauchy anlamında yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca yakınsak dizi sınırlı olmasına rağmen, istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmayabilir. Aşağıdaki örneklerden görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilir.

2.1. Örnek

$m \in \mathrm{IN}$ için

$$x_k = \begin{cases} 1\ , & k = m^2 \\ 0\ , & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left|\left\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \left|\left\{k \leq n : x_k \neq 0\right\}\right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : x_k \neq 0\right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Böylece st-$\lim x = 0$ bulunur.

2.2. Örnek

$m \in \mathrm{IN}$ için

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}\ , & k = m^2 \\ 3\ , & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi için st-lim$x=3$ tür.

Şimdi de toplanabilme hakkında biraz bilgi vereceğiz.

$A=(a_{nk})$ kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x=(x_n)$ bir dizi olsun. Eğer her $n\in IN$ için $(Ax)_n:=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$ mevcut ise, $Ax:=((Ax)_n)$ dizisine, (x_n) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. X ve Y reel ya da kompleks terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A=(a_{nk})$ sonsuz matris olsun. Eğer $\forall x\in X$ için $(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(Ax)_n\in Y$ ise $A=(a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X den Y içine tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir. Eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise, $A\in(X,Y)$ şeklinde yazılır. (X,Y;p) ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Örneğin, $A\in(c,c;p)$ olması $x_n\to L$ olduğunda $(Ax)_n\to L$ olması demektir. Bu tip matrislere regüler matrisler denir. $A\in(c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşulları Silverman-Toeplitz teoremi vermektedir. Bu teorem ispatsız olarak aşağıda verilecektir.

2.2. Teorem

$A=(a_{nk})$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

i) Her $k\in IN$ için $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=0$,

ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=1$,

iii) $\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$,

olmasıdır [Maddox, 1970].

2.3. Örnek

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ile verilen C_1 Cesáro matrisi ve I birim matrisi Teorem 2.1 in koşullarını sağladığı için her ikisi de regülerdir.

2.3. A-İstatistiksel Yakınsaklık

Yoğunluk kavramı, C_1 Cesáro matrisi yerine keyfi negatif olmayan regüler $A = (a_{nk})$ matrisi alınarak Freedman ve Sember (1981) tarafından genelleştirildi. Burada "negatif olmayan" ifadesi ile kastedilen her n ve her k için $a_{nk} \geq 0$ olmasıdır.

2.14. Tanım

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq IN$ olsun.

$$\delta_A(K) := \lim_{n\to\infty} (A\chi_K)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin A-yoğunluğu denir [Freedman ve Sember, 1981].

$\delta_A(K)$ veya $\delta_A(IN \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta_A(K) = 1 - \delta_A(IN \setminus K)$ dır.

Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise her A negatif olmayan regüler matris için K kümesinin A-yoğunluğu sıfırdır. Burada K sonlu bir küme ise onun karakteristik dizisi χ_K sonlu 1' lere sahiptir. Böylece $\lim_{n\to\infty}(\chi_K)_n = 0$ ve A regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty}(A\chi_K)_n = 0$ dır.

2.4. Örnek

$n \in IN$ için

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$K_1 = \{k = n^2 : n \in IN\}$ kümesi için $\delta_A(K_1) = 1$

ve

$K_2 = \{k \neq n^2 : n \in IN\}$ kümesi için $\delta_A(K_2) = 0$

dır.

2.15. Tanım

$A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\{k \in IN : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin A-yoğunluğu sıfır yani,

$$\delta_A(\{k \in IN : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir [Connor 1989, Kolk 1991].

2.5. Örnek

$n \in IN$ için

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 \ , & k = n^2 \\ 0 \ , & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A=(a_{nk})$ negatif olmayan regüler matrisini göz önüne alalım. $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{5} \ , & k = n^2 \\ 1 \ , & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için $K = \left\{ k \in IN : \left| x_k - \frac{1}{5} \right| \geq \varepsilon \right\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_{n\to\infty} (A\chi_K)_n = 0$$

olduğundan $st_A - \lim x = \dfrac{1}{5}$ dir.

Tanım 2.15 de eğer A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa, bu durumda klasik anlamındaki yakınsaklık elde edilir, hatta A yerine C_1 Cesáro matrisi alınırsa, A-istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

3. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak pozitif lineer operatör dizileri için reel sayıların keyfi bir aralığı üzerinde genel bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

3.1. Tanım

I, IR nin keyfi bir aralığı ve g, $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan artan ve $g(0)=1$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $C_g(I)$ kümesi

$$C_g(I)=\left\{ f\in C(I): \text{herhangi bir } c>0 \text{ için } \lim_{\substack{|x|\to\infty \\ x\in I}} \frac{|f(x)|}{[g(|x|)]^c}=0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. I=[a, b] alındığında, $\forall x\in I$ için $g(x)=1$ olmak üzere $C_g(I)$ notasyonu yerine C[a,b] kullanılır. $C_g(I)$ bir lineer uzaydır [Duman, Khan ve Orhan, 2003].

Bu kısımda yararlanacağımız “ Borel ölçüsü ” hakkında bazı bilgiler verelim.

X reel sayıların bir altkümesi ve ß, X üzerindeki tüm Borel kümelerinin bir sınıfı olsun. ß üzerinde tanımlanan ve kompakt kümeler için sonlu değer alan bir μ ölçüsüne “ Borel ölçüsü ” adı verilir [Royden 1968].

3.1. Teorem

I, IR nin keyfi bir aralığı ve ß, I aralığının Borel ölçülebilir altkümelerinin sigma cebiri olmak üzere, bir $x\in I$ için, $\{\mu_{n,x}: n\geq 1\}$, (I, ß) üzerinde tanımlı ölçülerin bir kolleksiyonu olsun. $f_2(y)=y^2$, $C_g(I)$ uzayında olacak şekilde bir g fonksiyonu seçelim ve herhangi bir $\delta>0$ için $I_\delta := [x-\delta, x+\delta] \cap I$ olmak üzere $\sup_{n\in IN} \int_{I \setminus I_\delta} g(|y|) d\mu_{n,k}(y) < \infty$ koşulu gerçeklensin. Ayrıca

$$L_n(f;x) = \int_I f(y) d\mu_{n,k}(y) \quad , \qquad n \in IN \text{ ve } f \in C_g(I)$$

şeklinde tanımlı $\{L_n\}$ operatörler dizisini göz önüne alalım ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) Her $f \in C_g(I)$ için $st_A - \lim_n |L_n(f;x) - f(x)| = 0$ dır.

b) $f_i(y) = y^i$, i=0,1,2 olmak üzere $st_A - \lim_n |L_n(f_i;x) - f_i(x)| = 0$ dır [Duman, Khan ve Orhan, 2003].

İspat

Gereklilik: Hipotez uyarınca her i=0,1,2 için $f_i \in C_g(I)$ olduğundan $(i) \Rightarrow (ii)$ önermesi gerçeklenir.

Yeterlilik: $f \in C_g(I)$ ve sabit bir $x \in I$ noktası alalım. f, I üzerinde sürekli olduğundan, $\varepsilon>0$ için $|x-y| \le \delta$ koşulunu sağlayan y elemanları için $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Diğer yandan

$$|f(y)-f(x)| = |f(y)-f(x)| \chi_{I_\delta}(y) + |f(y)-f(x)| \chi_{I \setminus I_\delta}(y)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca operatörlerin lineerliği ve pozitifliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f;x)-f(x)| &= |L_n(f - f(x)f_0 + f(x)f_0; x) - f(x)| \\ &= |L_n(f - f(x)f_0; x) - f(x)(L_n(f_0;x) - f_0(x))| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le |L_n(f - f(x)f_0;x)| + |f(x)||L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\
&= \int_{I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) + \int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) \\
&\quad + |f(x)||L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\
&\le \varepsilon \int_{I_\delta} d\mu_{n,x}(y) + \int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) \\
&\quad + |f(x)||L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\
&\le \varepsilon \int_{I} d\mu_{n,x}(y) + \int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) \\
&\quad + |f(x)||L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\
&= \varepsilon\, L_n(f_0;x) - \varepsilon f_0(x) + \varepsilon f_0(x) + |f(x)||L_n(f_0;x) - f_0(x)| \\
&\quad + \int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
|L_n(f;x) - f(x)| \le \varepsilon + (\varepsilon + |f(x)|)|L_n(f_0;x) - f_0(x)| + \int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) \tag{3.1}
$$

eşitsizliği bulunur. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$
\| f.g \|_1 \le \| f \|_p \| g \|_q
$$

olarak tanımlanan Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) &= \int_{I\setminus I_\delta} \chi_{I\setminus I_\delta}(y) |f(y) - f(x)| d\mu_{n,x}(y) \\
&\le \left[\int_{I} \chi_{I\setminus I_\delta}(y) d\mu_{n,x}(y) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{I\setminus I_\delta} |f(y) - f(x)|^q d\mu_{n,x}(y) \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

olacağından, hipotezler uyarınca $f \in C_g(I)$ olması $f^q \in C_g(I)$ olmasını gerektirir ve bu nedenle

$$\left[\int_{I \setminus I_\delta} | f(y) - f(x) |^q \, d\mu_{n,x}(y) \right]^{\frac{1}{q}} \le K \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir K sayısı vardır. Şimdi bir $\varphi : I \to IR$ fonksiyonunu $\varphi(y) = \dfrac{(y-x)^2}{\delta^2}$ ile tanımlayalım. Burada

$$y \in I \setminus I_\delta \text{ için } | y - x | > \delta \Rightarrow \frac{(y-x)^2}{\delta^2} > 1$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\mu_{n,x}(I \setminus I_\delta) &= \int_I \chi_{I \setminus I_\delta}(y) \, d\mu_{n,x}(y) \\
&\le \int_I \varphi(y) d\mu_{n,x}(y) \\
&= \int_I \frac{(y^2 - 2xy + x^2)}{\delta^2} d\mu_{n,x}(y) \\
&= \frac{1}{\delta^2} \left\{ L_n(f_2; x) - 2xL_n(f_1; x) + x^2 L_n(f_0; x) + x^2 - x^2 + x^2 - x^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\delta^2} \left\{ \left(L_n(f_2; x) - f_2(x) \right) - 2x\left(L_n(f_1; x) - f_1(x) \right) + x^2 \left(L_n(f_0; x) - f_0(x) \right) \right\}
\end{aligned}$$

olup her bir $a \in (0,1]$ için

$$| x + y |^a \le | x |^a + | y |^a$$

eşitsizliği de kullanılırsa,

$$\left[\mu_{n,x}\left(I \setminus I_{\delta}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left\{ x^{\frac{2}{p}} \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} \left| x \right|^{\frac{1}{p}} \left| L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left. + \left| L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right\} \tag{3.3}$$

elde edilir. Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 eşitsizlikleri Eş. 3.1 de uygulanırsa

$$\left| L_n(f;x)-f(x)\right| \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + \left| f(x)\right|\right) \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right| + \frac{K}{\delta^2}\left\{ x^{\frac{2}{p}} \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$+\frac{K}{\delta^2}\left\{ 2^{\frac{1}{p}} \left| x \right|^{\frac{1}{p}} \left| L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} + \left| L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right\}$$

bulunur. Şimdi $B(x):=\max\left\{ \varepsilon + \left| f(x)\right|, \frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}, K\left(\frac{|x|}{\delta}\right)^{\frac{2}{p}}, K\left(\frac{2|x|}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$ alınırsa, her bir $n \in IN$ için

$$\left| L_n(f;x)-f(x)\right| \leq \varepsilon + B(x)\left\{ \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right| + \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left. + \left| L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} + \left| L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right\} \tag{3.4}$$

gerçeklenir. Verilen $r>0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı seçelim. Ayrıca

$$D:=\left\{ n : \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right| + \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} + \left| L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left. + \left| L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|^{\frac{1}{p}} \geq \frac{r-\varepsilon}{B(x)} \right\}$$

$$D_1 :=\left\{ n : \left| L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right| \geq \frac{r-\varepsilon}{4B(x)} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ n : \left| L_n(f_0;x) - f_0(x) \right|^{\frac{1}{p}} \geq \frac{r-\varepsilon}{4B(x)} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ n : \left| L_n(f_1;x) - f_1(x) \right|^{\frac{1}{p}} \geq \frac{r-\varepsilon}{4B(x)} \right\}$$

$$D_4 := \left\{ n : \left| L_n(f_2;x) - f_2(x) \right|^{\frac{1}{p}} \geq \frac{r-\varepsilon}{4B(x)} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla Eş. 3.4 eşitliğinden her bir $n \in IN$ için

$$\sum_{k:|L_k(f;x)-f(x)|\geq r} a_{nk} \leq \sum_{k\in D} a_{nk} \leq \sum_{k\in D_1} a_{nk} + \sum_{k\in D_2} a_{nk} + \sum_{k\in D_3} a_{nk} + \sum_{k\in D_4} a_{nk}$$

sağlanacağından burada $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_n \sum_{k:|L_k(f;x)-f(x)|\geq r} a_{nk} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

I keyfi bir aralık olduğundan Teorem 3.1 deki A-istatistiksel yakınsaklık noktasal anlamdadır. Fakat I kapalı ve sınırlı bir aralık ise bu durumda yukarıdaki ispattan aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1. Sonuç

Eğer $a, b \in IR$ için $I = [a,b]$, $\{L_n(f;x)\}$ Teorem 3.1 deki koşulları gerçekleyen pozitif lineer operatör dizisi ve de $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ise, bu durumda aşağıdakiler denktir:

a) Her $f \in C[a,b]$ için $st_A - \lim_n \| L_n(f;x) - f(x) \|_{C[a,b]} = 0$ dır.

b) $f_i(y) = y^i$, $i = 0,1,2$ olmak üzere $st_A - \lim_n \| L_n(f_i; x) - f_i(x) \|_{C[a,b]} = 0$ dır.

Bu sonuçta A yerine birim matris alınırsa klasik Korovkin teoremi elde edilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ MEYER-KÖNIG VE ZELLER TİPLİ OPERATÖRLERİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak, Agratini operatörlerinin yaklaşım özellikleri Korovkin tipli bir teorem yardımıyla verilecektir.

4.1. Giriş

$x \in [0,1)$ ve $f \in C[0,1)$ için

$$M_n(f;x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right)\binom{n+k}{k} x^k, \qquad x \in [0,1) \tag{4.1}$$

$M_n(f;1) = f(1)$ şeklinde tanımlanan $M_n(f;x)$ operatörüne Meyer-König ve Zeller operatörü denir [Meyer-König ve Zeller, 1960]. Cheney ve Sharma (1964), Müller (1978), Totik (1983), Khan (1989), Jihua ve Luoqing (1991) tarafından bu operatörlerle ilgili bir çok çalışma yapılmıştır.

$M_n(f;x)$ operatörünün bir genellemesi ilk kez 1998 yılında Doğru tarafından verilmiştir. Bu operatörlerin bir Stancu genellemesi ise Agratini (2001) tarafından çalışılmıştır. Son olarak Doğru, Duman ve Orhan (2003) tarafından Agratini (2001) operatörlerinin Kantorovich tipli bir genellemesinin yaklaşım özellikleri A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak incelenmiştir.

4.2. Agratini Operatörleri

4.1. Tanım

$n, k \in IN$ için (α_n), (β_k) ve $(\gamma_{n,k})$ sırasıyla, aşağıdaki üç şartı sağlayan reel sayı dizileri ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun.

1) $\alpha_n \geq 1$ ve $st_A - \lim_n \alpha_n = 1$,

2) $0 \leq \beta_k \leq 1 + \beta_{k+1}$, (4.2)

3) Bir $c > 0$ için $0 \leq \gamma_{n,k} \leq \frac{c}{n}$.

Ayrıca $a \in (0,1)$ için $\{\varphi_n\}$ fonksiyon dizisi aşağıdaki dört koşulu sağlasın;

a) Her φ_n fonksiyonu $D = \{z \in C : |z| \leq a\}$ diskini kapsayan Ω bölgesi üzerinde analitiktir.

b) $\varphi_n^{(0)}(0) = \varphi_n(0) > 0$, $(\forall n \in IN)$ (4.3)

c) $\varphi_n^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dx^k} \varphi_n(x)\Big|_{x=0} \geq 0$, $(\forall k, n \in IN)$

d) Eş. 4.2 de verilen şartlar altında

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \alpha_n(k + n + \beta_k)(1 + \gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(x) \quad , \quad (\forall k, n \in IN)$$

dir.

Bu koşullar altında $f \in C[0,a]$ için

$$D_n(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} f\left(\frac{k}{k + n + \beta_k}\right) \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanan operatör dizisine Agratini operatörü denir. $D_n(f;x)$ pozitif ve lineerdir.

Burada 1 e istatistiksel yakınsak olan fakat alışılmış anlamda yakınsak olmayan bir (α_n) dizisi tanımlanabilir. Bunu görmek için (α_n) dizisini $n = m^2$ $(m \in IN)$ ise $\alpha_n = \sqrt{n}$ ve diğer durumlarda $\alpha_n = 1$ olarak tanımlamak yeterlidir. Dolayısıyla

Eş. 4.2'in 1) koşulu Agratini (2001) tarafından tanımlanan "$1 \leq \alpha_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$" koşulundan daha zayıftır.

Eş. 4.4 te

$$\beta_k = 0 \ (k \in IN), \qquad \varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$$

seçilir ve Eş. 4.3'ün c) ve d) koşulu dikkate alınırsa

$$D_n(f;x) = \frac{1}{(1-x)^{-n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n (k+n)(1+\gamma_{n,k}) \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^k}{k!} f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

elde edilir. Burada $\alpha_n = 1, \ \gamma_{n,k} = 0$ seçilirse

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{(k+n)}{k!} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

bulunur. Diğer taraftan son eşitlikte

$$\varphi_n^{(k-1)}(0) = \frac{(n+k-1)!}{n!}$$

yazılırsa

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

elde edilir. Böylece $D_n(f;x)$ Eş. 4.1 ile tanımlanan Meyer-König ve Zeller operatörüne dönüşür.

4.1. Örnek

$\beta_k = 0$ ve $t \leq 0$ için $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1} \exp\left(\dfrac{tx}{x-1}\right)$ ($L_k^n(t)$ Laguerre polinomudur) seçilirse, $D_n(f;x)$ operatörü Cheney ve Sharma (1964) tarafından verilen

$$P_n(f;x) = (1-x)^{n+1} \exp\left(\frac{tx}{x-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} L_k^n(t) x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

operatörüne dönüşür. Burada k. mertebeden Laguerre polinomu

$$L_k^n(t) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{\Gamma(k+n+1)}{(k-r)!\,\Gamma(n+r+1)\,r!} t^r$$

dir.

4.3. Agratini Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda Korovkin teoreminin A-istatistiksel yakınsaklık analoğu, Sonuç 3.1 kullanılarak (D_n) operatör dizisinin A-istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

4.1. Lemma

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| D_n(1;x) - 1 \right\|_{C[0,a]} = 0$$

dır.

İspat

Eş. 4.3'ün a) koşulundan

$$D_n\left(1;x\right)=1 \tag{4.5}$$

dir.

4.2. Lemma

$A=\left(a_{jn}\right)$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda

$$st_A-\lim_{n\to\infty}\left\|D_n\left(t;x\right)-x\right\|_{C[0,a]}=0$$

dır.

İspat

Eş. 4.4 de $f(t)$ yerine t alınır ve Eş. 4.3'ün d) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D_n\left(t;x\right)&=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\frac{k}{k+n+\beta_k}\\
&=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n\left(k+n+\beta_k\right)\left(1+\gamma_{n,k}\right)\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^k}{(k-1)!}\frac{1}{k+n+\beta_k}\\
&=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n\left(1+\gamma_{n,k}\right)\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^k}{(k-1)!}\\
&=\frac{x\alpha_n}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\gamma_{n,k}\right)\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 4.2'nin 3) özelliğinden

$$D_n(t;x) \le x\alpha_n \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$\le x\alpha_n \left(1+\frac{c}{n}\right) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$= x\alpha_n \left(1+\frac{c}{n}\right) D_n(1;x)$$

$$= x\alpha_n \left(1+\frac{c}{n}\right)$$

dir. Dolayısıyla

$$D_n(t;x) - x \le x\alpha_n \left(1+\frac{c}{n}\right) - x$$

$$D_n(t;x) - x \le x(\alpha_n - 1) + x\alpha_n \frac{c}{n} \tag{4.6}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_n(t;x) = \alpha_n x \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} (1+\gamma_{n,k+1}) \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$= \alpha_n x \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \alpha_n x \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k+1}\, \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

$$= \alpha_n x\, D_n(1;x) + \alpha_n x \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k+1}\, \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. O halde

$$D_n(t;x) - x = (\alpha_n - 1)x + \alpha_n x \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k+1}\, \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

bulunur. Eş. 4.2, Eş. 4.3'ün b) ve c) koşullarından son eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin her birisi pozitif olduğundan

$$D_n(t;x) - x \geq 0 \tag{4.7}$$

yazılabilir. Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 nin birleştirilmesiyle

$$0 \leq D_n(t;x) - x \leq x(\alpha_n - 1) + x\alpha_n \frac{c}{n}$$

elde edilir. $x \in [0,a]$ için maksimum alınırsa

$$\| D_n(t;x) - x \|_{C[0,a]} \leq a(\alpha_n - 1) + a\,\alpha_n \frac{c}{n}$$

sonucuna ulaşılır. $B_1 := \max\{a, ac\}$ alınırsa, her bir $n \in IN$ için

$$\| D_n(t;x) - x \|_{C[0,a]} \leq B_1\left[\alpha_n - 1 + \frac{\alpha_n}{n}\right] \tag{4.8}$$

gerçeklenir.Ayrıca Eş. 4.2'nin 1) koşulundan $st_A - \lim_n \frac{\alpha_n}{n} = 0$ dır.

Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$U := \left\{ n : \alpha_n - 1 + \frac{\alpha_n}{n} \geq \frac{\varepsilon}{B_1} \right\}$$

$$U_1 := \left\{ n : \alpha_n - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2B_1} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ n : \frac{\alpha_n}{n} \geq \frac{\varepsilon}{2B_1} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $U \subseteq U_1 \cup U_2$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla Eş. 4.8 uyarınca her bir $j \in IN$ için

$$\sum_{n:\|D_n(t;x)-x\|\geq\varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n\in U} a_{jn} \leq \sum_{n\in U_1} a_{jn} + \sum_{n\in U_2} a_{jn}$$

sağlanır. Burada $j \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{j} \sum_{n:\|D_n(t;x)-x\|\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3. Lemma

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| D_n(t^2;x) - x^2 \right\|_{C[0,a]} = 0$$

dır.

İspat

D_n operatörünün Eş. 4.4 ile verilen ifadesinde $f(t) = t^2$ alınır ve Eş. 4.3'ün d) özelliği göz önünde tutulursa

$$\begin{aligned}
D_n(t^2;x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \left(\frac{k}{k+n+\beta_k} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n (k+n+\beta_k)(1+\gamma_{n,k}) \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^k}{(k-1)!} \frac{k}{(k+n+\beta_k)^2} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n (1+\gamma_{n,k}) \varphi_n^{(k-1)}(0) \frac{x^k}{(k-1)!} \frac{k-1+1}{k+n+\beta_k}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_n(1+\gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^k}{(k-1)!}\frac{k-1}{k+n+\beta_k}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n(1+\gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^k}{(k-1)!}\frac{1}{k+n+\beta_k}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=2}^{\infty}\Big\{\alpha_n(1+\gamma_{n,k})\alpha_n(k-1+n+\beta_{k-1})$$

$$.(1+\gamma_{n,k-1})\varphi_n^{(k-2)}(0)\frac{x^k}{(k-2)!}\frac{1}{k+n+\beta_k}\Big\}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n(1+\gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^k}{(k-1)!}\frac{1}{k+n+\beta_k}$$

$$=\frac{x^2}{\varphi_n(x)}\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_n^{\,2}(1+\gamma_{n,k})(1+\gamma_{n,k-1})\frac{(k-1+n+\beta_{k-1})}{k+n+\beta_k}\varphi_n^{(k-2)}(0)\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$+\frac{x}{\varphi_n(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_n(1+\gamma_{n,k})\varphi_n^{(k-1)}(0)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\frac{1}{k+n+\beta_k}$$

$$=\frac{x^2\alpha_n^{\,2}}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}(1+\gamma_{n,k+2})(1+\gamma_{n,k+1})\frac{(k+1+n+\beta_{k+1})}{k+2+n+\beta_{k+2}}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

$$+\frac{x\alpha_n}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}(1+\gamma_{n,k+1})\varphi_n^{(k)}(0)\frac{1}{k+1+n+\beta_{k+1}}\frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. Eş. 4.2’nin 3) özelliğinden

$$D_n(t^2;x)\le\frac{x^2\alpha_n^{\,2}}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^2\frac{(k+1+n+\beta_{k+1})}{k+2+n+\beta_{k+2}}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

$$+\frac{x\alpha_n}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)\varphi_n^{(k)}(0)\frac{1}{k+1+n+\beta_{k+1}}\frac{x^k}{k!}$$

bulunur. Ayrıca Eş. 4.2’nin 2) özelliği göz önünde tutulursa

$$k+1+n+\beta_{k+1}\le k+2+n+\beta_{k+2}\ \text{ ve }\ n\le k+1+n+\beta_{k+1}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{k+1+n+\beta_{k+1}}{k+2+n+\beta_{k+2}} \leq 1 \text{ ve } \frac{1}{k+1+n+\beta_{k+1}} \leq \frac{1}{n}$$

olduğundan son eşitsizlik

$$D_n(t^2;x) \leq x^2\alpha_n^{\ 2}\left(1+\frac{c}{n}\right)^2 \frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$
$$+\frac{x\alpha_n}{n}\left(1+\frac{c}{n}\right)\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$D_n(t^2;x) \leq x^2\alpha_n^{\ 2}\left(1+\frac{c}{n}\right)^2 D_n(1;x)+\frac{x\alpha_n}{n}\left(1+\frac{c}{n}\right)D_n(1;x)$$

olup

$$D_n(t^2;x) \leq \alpha_n^{\ 2}\left(1+\frac{c}{n}\right)^2 x^2+\frac{\alpha_n}{n}\left(1+\frac{c}{n}\right)x$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D_n(t^2;x) \leq \alpha_n^{\ 2}x^2+\alpha_n x\left(\frac{2c\alpha_n x+1}{n}+\frac{c(\alpha_n cx+1)}{n^2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$D_n(t^2;x)-x^2 \leq (\alpha_n^{\ 2}-1)x^2+\alpha_n x\left(\frac{2c\alpha_n x+1}{n}+\frac{c(\alpha_n cx+1)}{n^2}\right) \tag{4.9}$$

dır.

Diğer taraftan

$$t^2 = (t-x)^2 + 2xt - x^2$$

olup D_n operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} D_n(t^2;x) - x^2 &= D_n\left((t-x)^2 + 2xt - x^2;x\right) \\ &= D_n\left((t-x)^2;x\right) + 2x\,D_n\left(t-x;x\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 4.7 ve D_n operatörünün pozitif olmasından

$$D_n\left(t^2;x\right) - x^2 \geq 0 \tag{4.10}$$

bulunur. Eş. 4.9 ile Eş. 4.10 eşitsizliklerinin birleştirilmesiyle

$$0 \leq D_n(t^2;x) - x^2 \leq (\alpha_n^{\ 2} - 1)x^2 + \alpha_n x\left(\frac{2c\alpha_n x + 1}{n} + \frac{c(\alpha_n cx + 1)}{n^2}\right)$$

elde edilir. $x \in [0,a]$ için maksimum alınırsa

$$\| D_n(t^2;x) - x^2 \|_{C[0,a]} \leq (\alpha_n^{\ 2} - 1)a^2 + \alpha_n a\left(\frac{2c\alpha_n a + 1}{n} + \frac{c(\alpha_n ca + 1)}{n^2}\right)$$

sonucuna ulaşırız. $B_2 := \{a, 2a^2c, ac^2, c\}$ alınırsa, her bir $n \in IN$ için

$$\| D_n(t^2;x) - x^2 \|_{C[0,a]} \leq B_2\left[\alpha_n^{\ 2} - 1 + \frac{\alpha_n^{\ 2}}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + \frac{1}{n^2}\right] \tag{4.11}$$

gerçeklenir. Ayrıca Eş. 4.2'nin 1) özelliğinden

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \alpha_n^2 = 1$$

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{n} = 0$$

ve

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$$

yazılabilir. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$U := \left\{ n : \alpha_n^2 - 1 + \frac{\alpha_n^2}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{\varepsilon}{B_2} \right\}$$

$$U_1 := \left\{ n : \alpha_n^2 - 1 \geq \frac{\varepsilon}{4B_2} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ n : \frac{\alpha_n^2}{n} \geq \frac{\varepsilon}{4B_2} \right\}$$

$$U_3 := \left\{ n : \frac{\alpha_n}{n} \geq \frac{\varepsilon}{4B_2} \right\}$$

$$U_4 := \left\{ n : \frac{1}{n^2} \geq \frac{\varepsilon}{4B_2} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ tür. Eş. 4.11 uyarınca her bir $j \in IN$ için

$$\sum_{n:\left\|D_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|\geq\varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n\in U} a_{jn} \leq \sum_{n\in U_1} a_{jn} + \sum_{n\in U_2} a_{jn} + \sum_{n\in U_3} a_{jn} + \sum_{n\in U_4} a_{jn}$$

sağlanır. $j \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{j} \sum_{n:\left\|D_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

4.1. Teorem

$A=(a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $\forall f\in C[0,a]$ için

$$st_A-\lim_n\|D_n(f;x)-f(x)\|_{C[0,a]}=0$$

dır.

İspat

Lemma 4.1, Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 den

$$st_A-\lim_n\|D_n(t^i;x)-x^i\|_{C[0,a]}=0\quad,\quad i=0,1,2$$

dir. Böylece Sonuç 3.1 den ispat tamamlanır.

5. AGRATINI OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEMESİ

Bu bölümde Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli bir genellemesi verilerek bu operatörlerin A-istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Ayrıca bu operatörlerin A-istatistiksel yakınsama hızı L_p metrik uzaylarında Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır. Bu operatörler ilk kez Doğru, Duman ve Orhan (2003) tarafından incelenmiştir.

5.1. Tanım

$k,n\in IN$ olmak üzere kabul edelim ki $(\alpha_n),(\beta_k)$ ve $(\gamma_{n,k})$ sırasıyla Eş. 4.2 koşullarını sağlayan diziler olsun. Ayrıca (φ_n) fonksiyon dizisi de Eş. 4.3'ün a), b), c) ve d) özelliklerini sağlasın. Burada f fonksiyonu $(0,1)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $(c_{n,k})$ dizisi

$$0\le c_{n,k}\le 1 \qquad (\forall n,k\in IN) \tag{5.1}$$

olmak üzere

$$D_n^*(f;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!\,c_{n,k}}\int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right)d\xi\ , \qquad n\in IN \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanan D_n^* operatörüne Agratini operatörlerinin Kantorovich tipli integral genellemesi denir.

5.1. Uyarı

Eş. 5.2 ile tanımlanan D_n^* operatörü aşağıdaki bazı özel seçimler altında Meyer-König ve Zeller operatörlerinin Kantorovich tipli genellemelerine dönüşmektedir.

Eş. 5.2 de $\beta_k = 0$ seçilirse, Doğru ve Özalp (2001) tarafından verilen Meyer-König ve Zeller operatörlerinin bir Kantorovich tipli genellemesi olan

$$M_n^*(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{n,k}} \varphi_n^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k}\right) d\xi$$

operatörü elde edilir. Eş. 5.2 de $\beta_k = 0$, $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$ ve $c_{n,k} = \dfrac{n}{k+n+1}$ seçilirse, $\alpha_n = 1$ ve $\gamma_{n,k} = 0$ $(\forall n,k \in IN)$ alınırsa $D_n^*(f;x)$ operatörü Totik (1983) tarafından verilen

$$M_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} \left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{n} \int_{k/(n+k)}^{(k+1)/(k+n+1)} f(u)du \right)$$

operatörüne dönüşür.

Şimdi $D_n^*(f;x)$ operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak verilen Korovkin teoremini, Sonuç 3.1'i gerçeklediği gösterilsin.

5.1. D_n^* Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsaklığı

5.1. Teorem

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $\forall f \in C[0,a]$ için

$$st_A - \lim_n \left\| D_n^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,a]} = 0$$

dır.

İspat

Eş. 5.2 de $f(t)=1$ alınır ve Eş. 4.3'ün a) özelliği göz önünde tutulursa

$$
\begin{aligned}
D_n^*(1;x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!\, c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} d\xi \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\; c_{n,k}}\, \xi\Big|_k^{k+c_{n,k}} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\; c_{n,k}} \left(k + c_{n,k} - k\right) \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olup

$$D_n^*(1;x) = 1 \tag{5.3}$$

bulunur. Şimdi de Eş. 5.2 de $f(t)=t$ alalım.

$$
\begin{aligned}
D_n^*(f;x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\; c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} \frac{\xi}{k+n+\beta_k} d\xi \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\, c_{n,k}} \left. \frac{\xi^2}{2(k+n+\beta_k)} \right|_k^{k+c_{n,k}} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\; c_{n,k}} \frac{(k+c_{n,k})^2 - k^2}{2(k+n+\beta_k)} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\; c_{n,k}} \frac{c_{n,k}(2k+c_{n,k})}{2(k+n+\beta_k)} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \frac{(2k+c_{n,k})}{2(k+n+\beta_k)}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\frac{k}{(k+n+\beta_k)}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\frac{c_{n,k}}{2(k+n+\beta_k)}$$

elde edilir. Eş. 4.4 den

$$D_n(t;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\frac{k}{k+n+\beta_k}$$

olup

$$D_n^{*}(t;x)=D_n(t;x)+\frac{1}{2\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\frac{c_{n,k}}{k+n+\beta_k}$$

bulunur. Ayrıca Eş. 5.1 ve Eş. 4.2'nin 2) özelliği göz önünde tutulursa

$$\frac{c_{n,k}}{k+n+\beta_k}\leq\frac{1}{k+n+\beta_k}\leq\frac{1}{n}$$

yazılabilir. Buradan son eşitlik

$$D_n^{*}(t;x)\leq D_n(t;x)+\frac{1}{2n}\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}$$

$$=D_n(t;x)+\frac{1}{2n}D_n(1;x)$$

bulunur. Eş. 4.5 den

$$D_n^{*}(t;x)\leq D_n(t;x)+\frac{1}{2n}$$

elde edilir. O halde

$$D_n^*(t;x)-x \le D_n(t;x)-x+\frac{1}{2n} \tag{5.4}$$

dir. Diğer yandan

$$D_n^*(t;x)-x = D_n(t;x)-x+\frac{1}{2\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)}{k!}\ x^k\ \frac{c_{n,k}}{k+n+\beta_k}$$

olup Eş. 4.2, Eş. 4.3'ün d), Eş. 4.7 ve Eş. 5.1 den eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Böylece

$$D_n^*(t;x)-x \ge 0 \tag{5.5}$$

dır. Eş. 5.4 ve Eş. 5.5 eşitsizliklerinin birleştirilmesiyle

$$0 \le D_n^*(t;x)-x \le D_n(t;x)-x+\frac{1}{2n}$$

elde edilir. $x \in [0,a]$ için maksimum alınırsa

$$\| D_n^*(t;x)-x \|_{C[0,a]} \le \| D_n(t;x)-x \|_{C[0,a]}+\frac{1}{2n} \tag{5.6}$$

bulunur. Şimdi verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$U := \left\{ n : \| D_n(t;x)-x \|_{C[0,a]}+\frac{1}{2n} \ge \varepsilon \right\}$$

$$U_1 := \left\{ n : \| D_n(t;x)-x \|_{C[0,a]} \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ n : \frac{1}{n} \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $U \subseteq U_1 \cup U_2$ dir. Dolayısıyla Eş. 5.6 dan her bir $j \in IN$ için

$$\sum_{n:\left\|D_n^*(t;x)-x\right\|_{C[0,a]}\geq\varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n\in U} a_{jn} \leq \sum_{n\in U_1} a_{jn} + \sum_{n\in U_2} a_{jn}$$

sağlanır. Buradan $j \to \infty$ için limit alınır ve Lemma 4.2 göz önünde tutulursa

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n:\left\|D_n^*(t;x)-x\right\|_{C[0,a]}\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

bulunur. Bu ise

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| D_n^*(t;x) - x \right\|_{C[0,a]} = 0 \tag{5.7}$$

olduğunu gösterir. Şimdi de Eş. 5.2 de $f(t) = t^2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
D_n^*(t^2;x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\, c_{n,k}} \int_k^{k+c_{n,k}} \left(\frac{\xi}{k+n+\beta_k} \right)^2 d\xi \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\, c_{n,k}} \left. \frac{\xi^3}{3(k+n+\beta_k)} \right|_k^{k+c_{n,k}} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\, x^k}{k!\, c_{n,k}} \frac{(k+c_{n,k})^3 - k^3}{3(k+n+\beta_k)^2} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \frac{\left(3k^2 + 3kc_{n,k} + c_{n,k}^{\ 2}\right)}{3(k+n+\beta_k)^2} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \frac{k^2}{(k+n+\beta_k)^2} + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0) x^k}{k!} \frac{kc_{n,k}}{(k+n+\beta_k)^2}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}\frac{c_{n,k}^{\ 2}}{(k+n+\beta_k)^2}$$

$$=D_n(t^2;x)+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}\frac{k\,c_{n,k}}{(k+n+\beta_k)^2}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\frac{c_{n,k}^{\ 2}}{(k+n+\beta_k)^2}$$

dir. Eş. 4.2'nin 2) özelliği ve Eş. 5.1 koşulları dikkate alınırsa $\dfrac{c_{n,k}}{k+n+\beta_k}\leq\dfrac{1}{n}$ olup

$$D_n^*(t^2;x)\leq\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}\left(\frac{k}{k+n+\beta_k}\right)^2+\frac{1}{n}\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{k!}\frac{k}{k+n+\beta_k}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{k!}$$

yazılabilir. Böylece

$$D_n^*(t^2;x)\leq D_n(t^2;x)+\frac{1}{n}D_n(t;x)+\frac{1}{3n^2}D_n(1;x)$$

$$=D_n(t^2;x)+\frac{1}{n}D_n(t;x)+\frac{1}{3n^2}$$

elde edilir. O halde

$$D_n^*(t^2;x)-x^2\leq D_n(t^2;x)-x^2+\frac{1}{n}D_n(t;x)+\frac{1}{3n^2} \tag{5.8}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D_n^*(t^2;x)-x^2=D_n^*\left((t-x)^2;x\right)+2x\,D_n^*\left((t-x);x\right)$$

yazılabilir. D_n^* operatörünün pozitifliğinden ve Eş. 5.5 den

$$D_n^*\left(t^2;x\right)-x^2 \geq 0 \tag{5.9}$$

dır. Eş. 5.8 ve Eş. 5.9 un birleştirilmesiyle Eş. 4.10 dan

$$0 \leq \left| D_n^*\left(t^2;x\right)-x^2 \right| \leq D_n\left(t^2;x\right)-x^2+\frac{1}{n}D_n\left(t;x\right)+\frac{1}{3n^2}$$

elde edilir. Her iki tarafın $x \in [0,a]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\left\| D_n^*\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_{C[0,a]} \leq \left\| D_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_{C[0,a]}+\frac{1}{n}\left\| D_n\left(t;x\right)\right\|_{C[0,a]}+\frac{1}{3n^2} \tag{5.10}$$

bulunur. Burada Lemma 4.2 den ve $st_A - \lim\limits_n \frac{1}{n}=0$ olduğundan

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\| D_n\left(t;x\right)\right\|_{C[0,a]}=0$$

dır. Şimdi verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$K:=\left\{n:\left\| D_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_{C[0,a]}+\frac{1}{n}\left\| D_n\left(t;x\right)\right\|_{C[0,a]}+\frac{1}{3n^2}\geq \varepsilon\right\}$$

$$K_1:=\left\{n:\left\| D_n\left(t^2;x\right)-x^2 \right\|_{C[0,a]}\geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

$$K_2:=\left\{n:\frac{1}{n}\left\| D_n\left(t;x\right)\right\|_{C[0,a]}\geq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

$$K_3:=\left\{n:\frac{1}{n^2}\geq \varepsilon\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $K \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3$ tür. Eş. 5.10 dan her bir $j \in IN$ için

$$\sum_{n:\left\|D_n^*(t^2;x)-x^2\right\|_{C[0,a]}\geq\varepsilon} a_{jn} \leq \sum_{n\in K} a_{jn} \leq \sum_{n\in K_1} a_{jn} + \sum_{n\in K_2} a_{jn} + \sum_{n\in K_3} a_{jn}$$

sağlanır. O halde $j \to \infty$ için limit alınır, Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 dikkate alınırsa

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n:\left\|D_n^*(t^2;x)-x^2\right\|_{C[0,a]}\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

bulunur. Bu ise

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| D_n^*\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_{C[0,a]} = 0 \tag{5.11}$$

olduğunu gösterir.

Böylece Eş. 5.3, Eş. 5.7 ve Eş. 5.11 den Sonuç 3.1'in şartları sağlandığından $\forall f \in C[0,a]$ için

$$st_A - \lim_{n\to\infty} \left\| D_n^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,a]} = 0$$

gerçeklenir.

5.2. Uyarı

$A = I$ birim matrisi alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1. Sonuç

$\forall f \in C[0,a]$ için $\{D_n^*(f)\}$ dizisi f fonksiyonuna $[0,a]$ aralığında düzgün yakınsaktır, yani

$$\lim_n \| D_n^*(f;x) - f(x) \|_{C[0,a]} = 0$$

dır.

5.2. D_n^* **Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsama Hızı**

Bu bölümde $D_n^*(f)$ operatörünün f ye yakınsama hızı, L_p-metrik uzaylarında Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.

5.1. Lemma

$D_n^*(f;x)$ operatörü için

$$d_{n,k} := \int_0^1 \frac{\varphi_n^{(k)}(0)x^k}{\varphi_n(x)k!}dx$$

olarak tanımlansın. $\forall n \in IN$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} \frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} < m \tag{5.12}$$

olacak şekilde pozitif bir m sabiti varsa, $\forall n \in IN$ için

$$\| D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x) \|_{L_p(0,1)} \le m \| f - g \|_{L_p(0,1)}$$

dir.

İspat

$$\left\{\int_0^1 \left|D_n^*(f;x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{\varphi_n(x)\,k!\;c_{n,k}}\int_k^{k+c_{n,k}} f\left(\frac{u}{k+n+\beta_k}\right)du\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Burada $\dfrac{u}{k+n+\beta_k}=\xi$ denirse $\dfrac{du}{k+n+\beta_k}=d\xi$ olur.

$u=k$ için $\dfrac{k}{k+n+\beta_k}=\xi$, $u=k+c_{n,k}$ için $\dfrac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}=\xi$ olacağından

$$\left\{\int_0^1 \left|D_n^*(f;x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)}{\varphi_n(x)\,k!}\,x^k\,\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} f(\xi)d\xi\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left\{\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)}{\varphi_n(x)\,k!}\,x^k\,\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} \left|f(\xi)\right|d\xi\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\int_0^1 \left(D_n^*\left(\left|f\right|;x\right)\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{5.13}$$

bulunur.

$P_{k,n}(x):=\dfrac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{\varphi_n(x)\,k!}$ olsun. $p>1$ için $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olmak üzere $\left(D_n^*\left(\left|f\right|;x\right)\right)^p$ ifadesine $\sum\left|a_k\right|\left|b_k\right|\leq\left(\sum\left|a_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\left|b_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ olarak tanımlanan Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(D_n^*(|f|;x)\right)^p=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(P_{k,n}(x)\right)^{\frac{1}{p}}\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}}\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\,|f(\xi)|\,d\xi\right\}^p$$

$$\leq\left\{\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\right\}^{\frac{p}{q}}\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\left(\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}}\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\,|f(\xi)|\,d\xi\right)^p$$

$$=\left(D_n(1;x)\right)^{\frac{p}{q}}\sum_{k=0}^{\infty}P_{k,n}(x)\left(\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}}\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\,|f(\xi)|\,d\xi\right)^p$$

dir. Böylece Eş. 4.5 den

$$\left(D_n^*(|f|;x)\right)^p\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{\varphi_n(x)\,k!}\left(\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}}\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\,|f(\xi)|\,d\xi\right)^p$$

bulunur.

(Ω, A, μ) ölçülebilir uzay ve $\mu(\Omega)=1$ olmak üzere g, μ -integrallenebilir bir fonksiyon ve φ, reel eksen üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$\varphi\left(\int_{\Omega}g\,d\mu\right)\leq\int_{\Omega}\varphi\circ g\,d\mu$$

olarak tanımlanan Jensen eşitsizliği

$$\left(\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}}\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}}\,|f(\xi)|\,d\xi\right)^p$$

ifadesinde kullanılırsa

$$\left(D_n^*\left(|f|;x\right)\right)^p \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{\varphi_n(x)\,k!}\;\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} |f(\xi)|^p\,d\xi \qquad (5.14)$$

elde edilir. Eş. 5.14, Eş. 5.13 de yerine yazılırsa

$$\left\{\int_0^1 \left|D_n^*(f;x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k)}(0)\,x^k}{\varphi_n(x)\,k!}\;\frac{k+n+\beta_k}{c_{n,k}} \left(\int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} |f(\xi)|^p\,d\xi\right) dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Böylece Eş. 5.12 den

$$\left\{\int_0^1 \left|D_n^*(f;x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left(m \int_{\frac{k}{k+n+\beta_k}}^{\frac{k+c_{n,k}}{k+n+\beta_k}} |f(\xi)|^p\,d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= m\|f\|_{L_p(0,1)}$$

yazılabilir. Burada f yerine f-g alınırsa, istenilen elde edilir.

5.1. Teorem

$\forall n \in IN$ ve $f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| D_n^*(f;x) - f(x)\right\|_{L_p(0,1)} \le (m+1)K_p\left(f;\left(h_n^{\;2}+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right) \qquad (5.15)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada m, Eş. 5.12 de verilen sabit, $\{K_p(f;\delta_n)\}$ Eş. 2.2 de tanımlanan K-fonksiyonlarının bir dizisi ve Eş. 4.2'nin 1) koşulunu sağlayan $\{\alpha_n\}$ dizisi için

$$h_n = \left(\frac{\alpha_n(n+c)}{n} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

İspat

$g \in L_p^2(0,1)$ olsun. Bu durumda g fonksiyonunun $t = x$ noktasındaki Taylor açılımından

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \frac{1}{2}g''(x)(t-x)^2$$

dir. Her iki yana D_n^* operatörü uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left|D_n^*(g;x) - g(x)\right| &= \left|g'(x)D_n^*(t-x;x) + \frac{1}{2}g''(x)D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right| \\
&\leq \left|D_n^*(t-x;x)\right|\left|g'(x)\right| + \frac{1}{2}\left|D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right|\left|g''(x)\right| \\
&\leq \left\|D_n^*(t-x;x)\right\|_{C(0,1)}\left|g'(x)\right| + \left\|D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right\|_{C(0,1)}\left|g''(x)\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{\int_0^1 \left|D_n^*(g;x) - g(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_0^1 \left(\left\|D_n^*(t-x;x)\right\|_{C(0,1)}\left|g'(x)\right|\right.\right.$$

$$+\left\| D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right\|_{C(0,1)} \left| g''(x) \right| \Big)^p \, dx \Big\}^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. $p \geq 1,\ f, g \in L_p$ ise $f+g \in L_p$ olup

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

şeklinde tanımlanan Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left\{ \int_0^1 \left| D_n^*(g;x) - g(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\| D_n^*(t-x;x) \right\|_{C(0,1)} \left(\int_0^1 \left| g'(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left\| D_n^*\left((t-x)^2;x\right) \right\|_{C(0,1)} \left(\int_0^1 \left| g''(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| D_n^*(t-x;x) \right\|_{C(0,1)} \left\| g'(x) \right\|_{L_p(0,1)} \\
&\quad + \left\| D_n^*\left((t-x)^2;x\right) \right\|_{C(0,1)} \left\| g''(x) \right\|_{L_p(0,1)} \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 4.6 ve Eş. 5.4 eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| D_n^*(t-x;x) \right| &\leq D_n(t;x) - x + \frac{1}{2n} \\
&\leq x(\alpha_n - 1) + x\,\alpha_n \frac{c}{n} + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Her iki yanın $x \in (0,1)$ için maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\| D_n^*(t-x;x) \right\|_{C(0,1)} &\leq \alpha_n - 1 + \alpha_n \frac{c}{n} + \frac{1}{2n} \\
&= \alpha_n \frac{(n+c)}{n} - 1 + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

$$=h_n^{\,2}+\frac{1}{n} \tag{5.17}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}D_n^*\left((t-x)^2;x\right)&=D_n^*\left(t^2-2xt+x^2-2x^2+2x^2;x\right)\\&=D_n^*\left(t^2;x\right)-x^2+2x\left(x-D_n(t;x)\right)\end{aligned}$$

dır. Eş. 5.5 eşitsizliğinden

$$x-D_n^*(t;x)\le 0$$

olup Eş. 5.9 dan

$$D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\le D_n^*\left(t^2;x\right)-x^2$$

elde edilir. Burada Eş. 4.6 ve Eş. 5.8 eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}D_n^*\left((t-x)^2;x\right)&\le D_n\left(t^2;x\right)-x^2+\frac{1}{n}D_n(t;x)+\frac{1}{3n^2}\\&\le\left(\alpha_n^{\,2}\left(\frac{n+c}{n}\right)^2-1\right)x^2+2x\alpha_n\frac{(n+c)}{n^2}+\frac{1}{3n^2}\end{aligned}$$

sonucu gerçeklenir. Buradan

$$\left|D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right|\le\left(\alpha_n^{\,2}\left(\frac{n+c}{n}\right)^2-1\right)x^2+2x\alpha_n\frac{(n+c)}{n^2}+\frac{1}{3n^2}$$

olup

$$\left\| D_n^*\left((t-x)^2;x\right)\right\|_{C(0,1)} \le \alpha_n^{\,2}\left(\frac{n+c}{n}\right)^2 - 1 + 2\alpha_n\frac{(n+c)}{n^2} + \frac{1}{3n^2}$$

$$\le \alpha_n^{\,2}\left(\frac{n+c}{n}\right)^2 - 1 + 2\alpha_n\frac{(n+c)}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \left(h_n^{\,2} + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1 \qquad (5.18)$$

bulunur. Diğer yandan Tanım 2.8 den

$$\| g \|_{L_p^2(0,1)} = \| g \|_{L_p(0,1)} + \| g' \|_{L_p(0,1)} + \| g'' \|_{L_p(0,1)}$$

olduğundan

$$\| g' \|_{L_p(0,1)} + \| g'' \|_{L_p(0,1)} \le \| g \|_{L_p^2(0,1)} \qquad (5.19)$$

dir. $\forall n \in IN$ için

$$h_n^{\,2} + \frac{1}{n} \le \left(h_n^{\,2} + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1$$

olup, Eş. 5.17 den

$$\left\| D_n^*(t-x;x)\right\|_{C(0,1)} \le \left(h_n^{\,2} + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1 \qquad (5.20)$$

bulunur. Böylece Eş. 5.18, Eş. 5.19 ve Eş. 5.20, Eş. 5.16 da yerine yazılırsa

$$\left\| D_n^*(g;x) - g(x)\right\|_{L_p(0,1)} \le \left(\left(h_n^{\,2} + \frac{1}{n} + 1\right)^2 - 1\right)\left(\| g' \|_{L_p(0,1)} + \| g'' \|_{L_p(0,1)}\right)$$

$$\leq \left(\left(h_n{}^2 + \frac{1}{n} + 1 \right)^2 - 1 \right) \| g \|_{L_p{}^2(0,1)} \tag{5.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan, D_n^* lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned} \left| D_n^*(f;x) - f(x) \right| &= \left| D_n^*(f;x) - D_n{}^*(g;x) + D_n^*(g;x) - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\ &\leq \left| D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x) \right| + \left| D_n^*(g;x) - g(x) \right| + \left| g(x) - f(x) \right| \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 \left| D_n^*(f;x) - f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \int_0^1 \left(\left| D_n^*(f;x) - D_n{}^*(g;x) \right| + \left| D_n^*(g;x) - g(x) \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| g(x) - f(x) \right| \right)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

bulunur. Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 \left| D_n^*(f;x) - f(x) \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 \left| D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \left| D_n^*(g;x) - g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \left| g(x) - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left\| D_n^*(f;x) - f(x) \right\|_{L_p(0,1)} &\leq \left\| D_n^*(f;x) - D_n^*(g;x) \right\|_{L_p(0,1)} + \left\| D_n^*(g;x) - g(x) \right\|_{L_p(0,1)} \\ &\quad + \| f - g \|_{L_p(0,1)} \end{aligned}$$

olup Lemma 5.1 den

$$\left\| D_n^*(f;x)-f(x)\right\|_{L_p(0,1)} \le m\left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)} + \left\| D_n^*(g;x)-g(x)\right\|_{L_p(0,1)} + \left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)}$$
$$=(m+1)\left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)} + \left\| D_n^*(g;x)-g(x)\right\|_{L_p(0,1)}$$

olur. Eş. 5.21 eşitsizliği kullanılırsa, $\forall n \in IN$ için

$$\left\| D_n^*(f;x)-f(x)\right\|_{L_p(0,1)} \le (m+1)\left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)} + \left(\left(h_n^{\;2}+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)\left\| g\right\|_{L_p^{\;2}(0,1)}$$
$$\le (m+1)\left\{ \left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)} + \left(\left(h_n^{\;2}+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)\left\| g\right\|_{L_p^{\;2}(0,1)} \right\}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanının $g \in L_p^2(0,1)$ üzerinden infimumu alınırsa

$$\left\| D_n^*(f;x)-f(x)\right\|_{L_p(0,1)} \le (m+1) \inf_{g\in L_p^2(0,1)} \left\{ \left\| f-g\right\|_{L_p(0,1)} + \left(\left(h_n^{\;2}+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)\left\| g\right\|_{L_p^2(0,1)} \right\}$$
$$=(m+1)\, K_p\left(f; \left(h_n^{\;2}+\frac{1}{n}+1\right)^2-1\right)$$

elde edilir.

$st_A-\lim\limits_{n\to\infty} K_p(f;\delta_n)=0$ olduğunda, Teorem 5.1 L_p-metrik uzaylarında $D_n^*(f;x)$ operatör dizisinin $f(x)$'e A-istatistiksel yakınsaklığını verir.

Burada Eş. 4.2'in 1) koşulundan $st_A-\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$ olup, Eş. 5.15 eşitsizliği L_p-metrik uzaylarında $D_n^*(f;x)$ operatörlerinin A-istatistiksel yakınsaklık oranını verecektir.

Ayrıca, $A = I$ birim matrisi alınırsa, bu operatörlerin klasik anlamdaki yakınsaklık hızı elde edilir.

6. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN İNTEGRAL TİPLİ GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde bilinen operatörlerin integral tipli genellemelerini içeren pozitif lineer operatörler dizisinin genel bir hali verilecek ve istatistiksel yakınsaklık kullanılarak, bu operatörler için Korovkin tipli bazı teoremler elde edilecektir. Daha sonra bu operatörlerin istatistiksel yakınsama hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır. Son olarak da bu operatörlerin r-inci basamaktan genelleştirilmesi verilecektir.

6.1. Giriş

Her bir sonlu Borel ölçüsü

$$F(x) = \mu(-\infty, x]$$

ile tanımlanan ve "μ nün kümülatif fonksiyonu " olarak bilinen bir F fonksiyonu ile eşlenebilir. Burada F, monoton artan, reel değerli ve sağdan sürekli olup $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ koşulunu gerçekler. Aynı zamanda monoton artan ve sağdan sürekli bir F fonksiyonuna karşılık bir tek μ Borel ölçüsü vardır ve tüm a ve b sayıları için $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ gerçeklenir [Royden 1968].

ß, I aralığının Borel ölçülebilir altkümelerinin σ-cebiri olmak üzere, $\{\mu_{n,k} : n \in IN \text{ ve } k \in IN_0\}$, (I, ß) üzerinde tanımlı ölçülerin bir kolleksiyonu olsun. Kabul edelim ki

$$\int_I d\mu_{n,k}(y) = 1 \tag{6.1}$$

ve herhangi bir $\delta > 0$ için $I_\delta := [x - \delta, x + \delta] \cap I$ olmak üzere

$$\sup_{n\in IN,k\in IN_0} \int_{I\setminus I_\delta} g(|\,y\,|)d\mu_{n,k}(y) < \infty \tag{6.2}$$

koşulu gerçeklensin.

Şimdi $x \in I,\ n \in IN$ ve $f \in C_g(I)$ olmak üzere

$$T_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k} \int_I f(y)d\mu_{n,k}(y) \tag{6.3}$$

şeklinde tanımlanan $T_n(f)$ operatörünü göz önüne alalım. Burada $r_{n,k}(x)$ aşağıdaki özellikleri sağlasın;

i) $r_{n,k}(x) \geq 0 \qquad x \in I,\ n \in IN,\ k \in IN_0$ (6.4)

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x) = 1 \qquad x \in I,\ n \in IN$ (6.5)

T_n operatörleri pozitif ve lineerdir. Eş. 6.2 koşulu, $f \in C_g(I)$ olduğunda f nin I üzerinde integrallenebilir olduğunu garanti eder. Dolayısıyla Eş. 6.3 de tanımlanan $T_n(f;x)$ operatörleri iyi tanımlıdır. Ayrıca Eş. 6.1 ve Eş. 6.5 koşullarından $T_n(1;x) = 1$ dir.

6.1. Uyarı

Eş. 6.3 ile tanımlı T_n operatörü bazı özel seçimler altında aşağıdaki operatörlere dönüşmektedir.

1) $I = [0,1]$ olmak üzere $n \in IN$ ve $k = 0,1,2,\ldots,n$ için $I_{n,k} := \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ olsun.

$$F_{n,k}(y)=(n+1)\int_{k/(n+1)}^{y}dt=(n+1)\left(y-\frac{k}{n+1}\right), \qquad \frac{k}{n+1}<y\leq\frac{k+1}{n+1}$$

kümülatif fonksiyonunu seçelim ve $r_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$, $x\in[0,1]$ olsun. $\mu_{n,k}$, $F_{n,k}$ ya karşılık gelen Borel ölçüsü olmak üzere, Lebesgue-Stieltjes integralinin tanımından

$$\int_{I_{n,k}}f(y)dF_{n,k}(y)=\int_{I_{n,k}}f(y)d\mu_{n,k}(y)$$

yazılabilir. Basit hesaplamalardan sonra T_n operatörü Kantorovich (1938) tarafından verilen

$$U_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}r_{n,k}(x)\int_{I_{n,k}}f(y)dy \ , \qquad x\in[0,1]$$

şeklinde tanımlanan Bernstein-Kantorovich operatörüne dönüşür.

2) $I=[0,\infty)$ olmak üzere $n\in IN$ ve $k=0,1,2,\ldots,n$ için $I_{n,k}:=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ olsun.

$$F_{n,k}(y)=(n+1)\int_{k/n}^{y}dt=(n+1)\left(y-\frac{k}{n}\right) \ , \qquad \frac{k}{n}<y\leq\frac{k+1}{n}$$

kümülatif fonksiyonunu tanımlayalım. $r_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^{k}(1+x)^{-n}$, $x\in[0,\infty)$ alınırsa T_n operatörüne Agratini (2001) tarafından verilen

$$K_n(f;x) = n\sum_{k=0}^{n} r_{n,k}(x)\left(\int_{I_{n,k}} f(y)dy\right) , \qquad x \in [0,\infty)$$

Balász-Kantorovich operatörlerine dönüşür.

6.2. T_n Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde Eş. 6.1 de tanımlanan T_n operatörü için A-istatistiksel yakınsaklık teoremi verilecektir.

6.1. Teorem

I, IR nin keyfi bir aralığı olsun. $A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olmak üzere $x \in I$ noktası seçelim. $f_2(y) = y^2$, $C_g(I)$ uzayında olacak şekilde bir g fonksiyonu seçelim ve Eş. 6.2 koşulu gerçeklensin. Bu durumda her $f \in C_g(I)$ için,

i) $st_A - \lim_n | T_n(f;x) - f(x) | = 0$

ii) $f_i(y) = y^i, i = 1,2$ olmak üzere $st_A - \lim_n | T_n(f_i;x) - f_i(x) | = 0$

dır.

İspat

Gereklilik: Hipotez uyarınca açıktır.

Yeterlilik: $f \in C_g(I)$ ve $x \in I$ noktası seçelim. f, I üzerinde sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve $y \in I_\delta$ için $| f(y) - f(x) | < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$| f(y) - f(x) | = | f(y) - f(x) | \chi_{I_\delta}(y) + | f(y) - f(x) | \chi_{I \setminus I_\delta}(y)$$

yazılabilir. Ayrıca T_n operatörünün lineerliği ve pozitifliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|T_n(f;x)-f(x)| &\le T_n(|f-f(x)|;x) \\
&= T_n(|f(y)-f(x)|\,\chi_{I_\delta}(y)+|f(y)-f(x)|\,\chi_{I\setminus I_\delta}(y);x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |f(y)-f(x)|\,\chi_{I_\delta}(y)d\mu_{n,k}(y) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |f(y)-f(x)|\,\chi_{I\setminus I_\delta}(y)d\mu_{n,k}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y) \\
&\le \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I_\delta} d\mu_{n,k}(y)+\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y) \\
&\le \varepsilon\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I} d\mu_{n,k}(y)+\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eş. 6.1 ve Eş. 6.5 eşitlikleri dikkate alınırsa

$$
|T_n(f;x)-f(x)| \le \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y) \tag{6.6}
$$

bulunur. Hölder eşitsizliği uyarınca, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$
\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|d\mu_{n,k}(y) \le \left[\int_{I\setminus I_\delta} d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|^q d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{q}} \tag{6.7}
$$

dir. Hipotez ve g nin tanımından $f\in C_g(I)$ olması $f^q\in C_g(I)$ olmasını gerektirir. Bu nedenle $\forall n\in IN$ ve $k\in IN_0$ için

$$.\left[\int_{I\setminus I_\delta} |f(y)-f(x)|^q d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{q}} < K \tag{6.8}$$

olacak şekilde pozitif bir K sayısı vardır. Eş. 6.7 ve Eş. 6.8 eşitsizlikleri Eş. 6.6 ile birleştirilirse

$$|T_n(f;x)-f(x)| \leq \varepsilon + K\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\left[\int_{I\setminus I_\delta} d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir ve böylece

$$|T_n(f;x)-f(x)| \leq \varepsilon + K\ \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}^{\frac{1}{q}}(x)\left[\int_{I\setminus I_\delta} r_{n,k}(x)d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.9}$$

bulunur. Eş. 6.9 de Hölder eşitsizliği tekrar uygulanırsa

$$|T_n(f;x)-f(x)| \leq \varepsilon + K\left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\right]^{\frac{1}{q}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta} d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.10}$$

gerçeklenir. Eğer $y \in I \setminus I_\delta$ ise, bu durumda $|y-x| \geq \delta$ olacağından $\frac{(y-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ sağlanır. Eş. 6.5 eşitliği de göz önüne alınırsa son eşitsizlik

$$\begin{aligned}|T_n(f;x)-f(x)| &\leq \varepsilon + \frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I\setminus I_\delta}(y-x)^2 d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon + \frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left[\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_{I}(y-x)^2 d\mu_{n,k}(y)\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$=\varepsilon+\frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left[T_n\left((y-x)^2;x\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \varepsilon+\frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left\{\left|T_n(f_2;x)-f_2(x)\right|+2|x|\left|T_n(f_1;x)-f_1(x)\right|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

olur. Her bir $\alpha\in(0,1]$ için $|x+y|^{\alpha}\leq|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_n(f;x)-f(x)\right|\leq\varepsilon+\frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}}\left\{\left|T_n(f_2;x)-f_2(x)\right|^{\frac{1}{p}}+2^{\frac{1}{p}}|x|^{\frac{1}{p}}\left|T_n(f_1;x)-f_1(x)\right|^{\frac{1}{p}}\right\}$$

sonucu elde edilir. $M(x):=\max\left\{\frac{K}{\delta^{\frac{2}{p}}},K\left(\frac{2|x|}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$ alınırsa, her bir $n\in IN$ için

$$\left|T_n(f;x)-f(x)\right|\leq\varepsilon+M(x)\left\{\left|T_n(f_2;x)-f_2(x)\right|^{\frac{1}{p}}+\left|T_n(f_1;x)-f_1(x)\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\qquad(6.11)$$

bulunur. Hipotez göz önüne alınırsa

$$st_A-\lim_n\left|T_n(f_i;x)-f_i(x)\right|^{\frac{1}{p}}=0\qquad(i=1,2)\qquad(6.12)$$

yazılabilir. Şimdi verilen bir $r>0$ için $\varepsilon<r$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı seçelim ve

$$U:=\left\{n:\left|T_n(f;x)-f(x)\right|\geq r\right\}$$

$$U_1:=\left\{n:\left|T_n(f_1;x)-f_1(x)\right|^{\frac{1}{p}}\geq\frac{r-\varepsilon}{2M(x)}\right\}$$

$$U_2:=\left\{n:\left|T_n(f_2;x)-f_2(x)\right|^{\frac{1}{p}}\geq\frac{r-\varepsilon}{2M(x)}\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. $U \subseteq U_1 \cup U_2$ olduğu açıktır. Böylece Eş. 6.11 eşitsizliği her $j \in IN$ için

$$\sum_{n\in U} a_{jn} \leq \sum_{n\in U_1} a_{jn} + \sum_{n\in U_2} a_{jn}$$

dır. Burada $j \to \infty$ için limit alınır ve Eş. 6.12 eşitliği kullanılırsa istenilen elde edilir.

I keyfi bir aralık olduğundan, Teorem 6.1 deki A-istatistiksel yakınsaklık noktasal anlamdadır. Fakat I kapalı ve sınırlı bir aralık (örneğin $I = [a, b]$) ise, bu durumda yukarıdaki ispattan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

6.1. Sonuç

$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda her $f \in C[a, b]$ için aşağıdakiler denktir:

i) $st_A - \lim_n \| T_n(f; x) - f(x) \|_{C[a,b]} = 0$

ii) $f_i(y) = y^i, i = 0,1,2$ olmak üzere $st_A - \lim_n \| T_n(f_i; x) - f_i(x) \|_{C[a,b]} = 0$.

Eğer Sonuç 6.1 de $A = (a_{jn})$ matrisi yerine birim matris alınırsa klasik Korovkin teoremi elde edilir.

6.3. T_n Operatörlerinin A-İstatistiksel Yakınsama Hızı

Bu bölümde Teorem 6.1 deki A-istatistiksel yakınsama hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından elemanlar yardımıyla hesaplanacaktır.

6.2. Teorem

I ve g, Teorem 6.1 de tanımlandığı gibi olsun. Ayrıca Eş. 6.1 koşulu gerçeklensin ve bir $x \in I$ seçelim. Bu durumda her $f \in C_g(I)$ için,

$$|T_n(f;x) - f(x)| \leq 2w(f;\delta_n), \qquad n \in IN$$

dır. Burada

$$\delta_n := \left[T_n\left((y-x)^2;x\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve $w(f;\delta_n)$, Eş. 2.1 ile verilen f nin süreklilik modülüdür.

İspat

$f \in C_g(I)$ ve $x \in I$ noktası seçelim. T_n nin lineerlik ve monotonluk özelliklerinden

$$\begin{aligned} |T_n(f;x) - f(x)| &= |T_n(f(y) - f(x);x)| \\ &\leq T_n(|f(y) - f(x)|;x) \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.3 ün (iv) ve (vi) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} |T_n(f;x) - f(x)| &\leq T_n\left(w\left(f,|y-x|\right);x\right) \\ &\leq T_n\left(\left(1 + \frac{|y-x|}{\delta}\right)w(f;\delta);x\right) \\ &= w(f;\delta)\left[1 + \frac{1}{\delta}T_n\left(|y-x|;x\right)\right] \\ &= w(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |y-x|\,d\mu_{n,k}(y)\right)\right\} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\sum a_k b_k \le \left(\sum (a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum (b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ve Eş. 6.5 den

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x)-f(x)| &\le w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}^{\frac{1}{2}}(x)\, r_{n,k}^{\frac{1}{2}}(x)\int_I |y-x|\, d\mu_{n,k}(y)\right)\right\} \\
&\le w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |y-x|\, d\mu_{n,k}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |y-x|\, d\mu_{n,k}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[T_n\left(|y-x|^2;x\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

sonucu gerçeklenir. Burada

$$\delta := \delta_n = \left[T_n\left(|y-x|^2;x\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
|T_n(f;x)-f(x)| &\le w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\delta\right\} \\
&= 2w(f;\delta)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Şimdi ise $T_n(f)$ in f ye yaklaşma hızı Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar yardımıyla incelenecektir.

6.3. Teorem

$x \in I$ seçelim. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere her $f \in C_g(I) \cap Lip_M(\alpha)$ için

$$|T_n(f;x) - f(x)| \le M\,\delta_n{}^{\alpha}$$

dır. Burada

$$\delta_n := \left[T_n\left((y-x)^2; x\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve $Lip_M(\alpha)$, Eş. 2.3 de verilen Lipschitz sınıfıdır.

İspat

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f \in C_g(I) \cap Lip_M(\alpha)$ ve $x \in I$ seçelim. T_n nin lineerlik ve monotonluk özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} |T_n(f;x) - f(x)| &= |T_n(f(y) - f(x); x)| \\ &\le T_n(|f(y) - f(x)|; x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x) \int_I |f(y) - f(x)|\, d\mu_{n,k}(y) \\ &\le M \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x) \int_I |y - x|^{\alpha}\, d\mu_{n,k}(y) \end{aligned}$$

elde edilir. $p = \dfrac{2}{\alpha}$ ve $q = \dfrac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere

Hölder eşitsizliğinden

$$|T_n(f;x)-f(x)| \le M\sum_{k=0}^{\infty}\left(r_{n,k}(x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\left(r_{n,k}(x)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\int_I |y-x|^{\alpha}\,d\mu_{n,k}(y)$$

$$\le M\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |y-x|^{2}\,d\mu_{n,k}(y)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. Eş. 6.5 ten dolayı

$$|T_n(f;x)-f(x)| \le M\left(\sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x)\int_I |y-x|^{2}\,d\mu_{n,k}(y)\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M\left[T_n\left((y-x)^2;x\right)\right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

yazılabilir. $\delta_n := \left[T_n\left((y-x)^2;x\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ alınırsa ispat tamamlanır.

6.4. T_n Operatörlerinin r-inci Basamaktan Genelleştirilmesi

$$C_g^{(r)}(I)=\left\{f : f^{(r)} \in C_g(I)\right\} \qquad (r=0,1,2,...)$$

dır. r = 0 ise bu durumda $C_g^{(0)}(I)=C_g(I)$ dır.

$f \in C_g^{(r)}(I)$, $(r=0,1,2,...)$, $n \in IN$ ve $r_{n,k}(x)$ Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 koşullarını sağlamak üzere T_n operatörünün r – inci basamaktan genelleştirilmesi

$$T_n^{[r]}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r} r_{n,k}(x)\int_I f^{(i)}(y)\frac{(x-y)^i}{i!}\,d\mu_{n,k}(y) \qquad (6.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer Eş. 6.13 de r = 0 alınırsa bu operatör Eş. 6.3 ile tanımlanan operatöre dönüşür. Şimdi Eş. 6.13 ile tanımlanan $T_n^{[r]}$ operatörü için aşağıdaki yaklaşım teoremini ifade edelim.

6.4. Teorem

I reel eksenin keyfi bir aralığı olsun. Bu durumda $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde her $f \in C_g^{(r)}(I)$ ve her bir $x \in I$ için

$$\left| T_n^{[r]}(f;x) - f(x) \right| \leq C\ T_n\left(\left| y - x \right|^{\alpha + r}; x \right)$$

dir. Burada

$$C = \frac{M\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!}$$

ve $B(\alpha, r)$, Beta fonksiyonudur.

İspat

Eş. 6.1 ve Eş. 6.13 ten

$$f(x) - T_n^{[r]}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x) \int_I \left(f(x) - \sum_{i=0}^{r} f^{(i)}(y) \frac{(x-y)^i}{i!} \right) d\mu_{n,k}(y) \tag{6.14}$$

yazılabilir. Taylor integral formülünden

$$f(x) - \sum_{i=0}^{r} f^{(i)}(y) \frac{(x-y)^i}{i!} = \frac{(x-y)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left[f^{(r)}(y + t(x-y)) - f^{(r)}(y) \right] dt \tag{6.15}$$

dır. $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olduğundan

$$\left| f^{(r)}\left(y + t(x-y) \right) - f^{(r)}(y) \right| \leq Mt^{\alpha} \left| x-y \right|^{\alpha} \tag{6.16}$$

yazılabilir. Eş. 6.16 eşitsizliği Eş. 6.15 de yerine konursa ve Beta fonksiyonunun

$$\int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{\alpha} dt = B(1+\alpha, r)$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha + r} B(\alpha, r)$$

tanımı kullanılırsa

$$f(x) - \sum_{i=0}^{r} f^{(i)}(y) \frac{(x-y)^i}{i!} \leq \left| x-y \right|^{\alpha + r} \frac{M\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!} \tag{6.17}$$

bulunur. Eş. 6.17 eşitsizliği Eş. 6.14 de yazılırsa

$$\left| f(x) - T_n^{[r]}(f;x) \right| \leq \frac{M\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} r_{n,k}(x) \int_I \left| x-y \right|^{\alpha + r} d\mu_{n,k}(y)$$

$$= \frac{M\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!} T_n\left(\left| x-y \right|^{\alpha + r}; x \right)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Teorem 6.4 ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

6.2. Sonuç

Eğer Teorem 6.1 deki ii) koşulu sağlanırsa, bu takdirde $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde her $f \in C_g^{(r)}(I)$ için

$$st_A - \lim_n \left| T_n^{[r]}(f;x) - f(x) \right| = 0$$

dir.

6.3. Sonuç

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olacak şekilde her $f \in C_g^{(r)}(I)$ için

$$\left| T_n^{[r]}(f;x) - f(x) \right| \leq M' \; w\left(\left| y - x \right|^{\alpha + r}, \delta_n \right)$$

dır. Burada

$$M' = \frac{2M\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!}$$

ve δ_n, Teorem 6.2 de tanımlandığı gibidir.

6.4. Sonuç

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ daki her $f \in C_g^{(r)}(I)$ için

$$\left| T_n^{[r]}(f;x) - f(x) \right| \leq M'' \delta_n$$

dir. Burada

$$M'' = \frac{M^2\alpha}{\alpha + r} \frac{B(\alpha, r)}{(r-1)!}$$

ve δ_n, Teorem 6.2 de tanımlandığı gibidir.

KAYNAKLAR

Agratini, O., "Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators", ***Math. Ineq. Appl.***, 4(1):119-126 (2001).

Altomare, F. and Campiti, M., "Korovkin type approximation theory and its applications", ***De Gruyter Stud. Math.***, 17 (1994).

Bleimann, G., Butzer, P.L. and Hahn, L., "A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi axis", ***Proc. Netherl. Acad. Sci. A 83***, Indag. Math., 42:255-262 (1980).

Bojanic, R. and Cheng, F., "Estimates for the rate of approximation of functions of bounded variation by Hermite-Fejér polynomials", ***Proc. Conference of Canadian Math. Soc.***, 3:5-17 (1983).

Bojanic, R. and Khan, M.K., "Summability of Hermite-Fejér interpolation for functions of bounded variation, ***J. Nat. Sci. Math.***, 32:5-10 (1992).

Cheney, E.W. and Sharma, A., "Bernstein power series", ***Canad. J. Math.***, 16:241-253 (1964).

Connor, J.S., "On strong matrix summability with respect to a modulus and statiatical convergence", ***Canad. Math. Bull.***, 32:194-198 (1989).

DeVore, R.A., "The approximation of continuous functions by positive linear operators", ***Lecture Notes in Math.***, Springer, Berlin, 293 (1972).

Doğru, O., "Approximation order and asymptotic approximation for generalized Meyer-König and Zeller operators", ***Math. Balkanica***, 12:359-368 (1998).

Doğru, O. and Özalp, N., "Approximation by Kantorovich type generalization of Meyer-König and Zeller operators", ***Glasnik Math.***, 36(56):311-318 (2001).

Doğru, O., Duman, O. and Orhan, C., "Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type operators", ***Studia Math.***, 40:359-371 (2003).

Duman, O., Khan, M.K. and Orhan, C., "A-Statistical convergence of approximating operators", ***Math. Ineg. Appl.***, 6:689-699 (2003).

Fast, H., "Sur la convergence statistique", ***Collog. Math.***, 2:241-244 (1951).

Freedman, A.R. and Sember, J.J., "Densities and summability", ***Pacific J. Math.***, 95:293-305 (1981).

Fridy, J.A., "On statistical convergence", ***Analysis***, 5:301-313 (1985).

Gadjiev, A.D. and Orhan, C., “Some approximation theorems via statistical convergence”, ***Rocky Mountain J. Math.***, 32:129-138 (2002).

Jihua, X. and Luoqing, L., “Converse theorems on approximation by integral type Meyer-König and Zeller operators”, ***Academic Pres***, Boston, 899-911 (1991).

Kantorovich, L.V., “Une remarque sur les polynômes de M.S. Bernstein”, ***Studia Math.***, 7:49-51 (1938).

Khan, M.K., “On the rate of convergence of Bernstein power series for functions of bounded variation”, ***J. Approx. Theory***, 57(1):90-103 (1989).

Kolk, E., “The statistical convergence in Banach spaces”, ***Acta Comm. Univ. Tartuensis***, 928:41-52 (1991).

Korovkin, P.P., “Linear operators and theory of approximation”, ***Hindustan Publ. Co.***, 38-45 (1960).

Maddox, I.J., “Elements of functional analysis”, ***Cambridge Univ. Pres.***, 46-67 (1970).

Meyer-König, W. and Zeller, K., “Bernsteinsche potenzreihen”, ***Studia Math.***, 19:77-83 (1960).

Müller, M.W., “L_p approximation by the method of integral type Meyer-König and Zeller operators”, ***Studia Math.***, 63:81-88 (1978).

Niven, I. and Zuckerman, H.S., “An introduction to the theory of numbers”, ***Fourth Ed. John Willey***, New York, 57-87 (1980).

Royden, H.L., “Real Analysis”, 2nd ed., ***Macmillan***, New York, 56-75 (1968).

Steinhaus, H., “Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique”, ***Collog. Math.***, 2:73-74 (1951).

Totik, V., “Approximation by Meyer-König and Zeller type operators”, ***Math. Z.***, 182:425-446 (1983).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÇETİN, Nursel
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 1983 / Antalya
Medeni hali	: Bekar

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2009
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2005
Lise	Manavgat Lisesi (Y.D.A.)	2001

Yabancı Dil

İngilizce