İKİ DEĞİŞKENLİ q – BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Hüseyin Erhan ALTIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2010
ANKARA

Hüseyin Erhan ALTIN tarafından hazırlanan İKİ DEĞİŞKENLİ $q-$BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Oktay DUMAN ……………………………….

Matematik Anabilim Dalı, TOBB Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ ……………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 24 / 06 / 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ……………………………….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hüseyin Erhan ALTIN

İKİ DEĞİŞKENLİ $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin Erhan ALTIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2010

ÖZET

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde lineer pozitif operatör dizisinin tanımı verilmiş ve temel özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca Korovkin teoremi ve ispatı verilmiştir. İkinci bölümde $q-$Bernstein polinomlarının tanımı verilmiş, Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla $q-$Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna yaklaşım hızının tahmini yer almaktadır. Ayrıca, f nin konveks bir fonksiyon olması durumunda $q-$Bernstein polinomlarının monotonluk özellikleri incelenmiştir. Son olarak $q-$Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna yaklaşım hızının tahmini Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için de elde edilmiştir. Dördüncü bölümde $q-$Bernstein polinomlarının King tipli genelleşmeleri elde edilmiş ve King tipli $q-$Bernstein polinomu için üçüncü bölümde incelenen yaklaşımlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde Volkov teoremi ifade ve ispat edilmiş daha sonra iki değişkenli $q-$Bernstein polinomlarının tanımı verilerek Volkov teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde iki değişkenli King tipli $q-$Bernstein polinomlarının tanımı verilerek Volkov teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : **204.1.138**
Anahtar Kelimeler : **Lineer pozitif operatörler, Korovkin tipli teoremler, Bernstein polinomları, q-serileri, q-Bernstein polinomları, Süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli**
Sayfa Adedi : **86**
Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Ogün DOĞRU**

APPROXIMATION PROPORTIES OF KING TYPE GENERALIZATIONS OF BIVARIATE $q-$ BERNSTEIN POLYNOMIALS

(M.Sc. Thesis)

Hüseyin Erhan ALTIN

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2010

ABSTRACT

This master thesis consist of six chapters. In the first chapter, some definitions of a sequence of linear positive operators are given and their fundamental properties are obtained. The Korovkin theorem and its prof is also given. In the second chapter, definition of $q-$Bernstein polynomials is given and its approximation properties are obtained with the help of Korovkin theorem. The third chapter is devoted to the estimation of order of approximation of the $q-$Bernstein polynomials to the function f with the help of modulus of continutiy and K- functionals of Peetre. Also, the monotoncity properties of $q-$Bernstein polynomials are investigated when f is a convex function. Moreover, the estimation of speed of approximation of the $q-$Bernstein polynomials to the function f is obtained for the functions in Lipschitz class. In the fourth chapter, King type generalizations of $q-$Bernstein polynomials are introduced and the approximation properties of these polynomials are obtained like third chapter.

In the fifth chapter, the Volkov theorem is given, then the definition of bivariate $q-$Bernstein poliynomials is given and their approximation properties are examined with the help of Volkov theorem. In the last chapter, King type bivariate generalizations of $q-$Bernstein polynomials are introduced and their aproximation properties are studied with the help of Volkov theorem.

Science Code : **204.1.138**
Key Words : **Linear positive operators, Korovkin type theorems, Bernstein polynomials, q- series, q-Bernstein polynomials, modulus of continuity, Peetre-K functionals**
Page Number : **86**
Adviser : **Assoc. Prof. Dr. Ogün DOĞRU**

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocam, Sayın Doç. Dr. Ogün DOĞRU ‘ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$A_n(f;x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(f;q;x)$	$q-$Bernstein polinomları
C	Komplex sayılar cümlesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$C^2[a,b]$	$g, g', g'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı
$g_n(x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$g_n(x) \underset{\rightarrow}{\rightarrow} g(x)$	$\{g_n\}$ fonksiyon dizisi g fonksiyonuna düzgün yakınsar
$K(f;\delta)$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$\varphi_{n,k}(x)$	k-yıncı merkezi moment
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\|\cdot\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\|\cdot\|_{C[a,b]} = \underset{a \le x \le b}{maks}\lvert\cdot\rvert$ ile tanımlı norm
$\|\cdot\|_{C^2[a,b]}$	$\|g\|_{C^2[a,b]} = \|g\|_{C[a,b]} + \|g'\|_{C[a,b]} + \|g''\|_{C[a,b]}$ ile tanımlı norm

1. GİRİŞ

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ve sağladığı temel özellikler incelenecektir ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecektir. Ayrıca Korovkin teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Temel Kavramlar

1.1 Tanım

Lineer normlu fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı dönüşümlere operatör denir.

1.2 Tanım

U ve V fonksiyon uzayları olmak üzere

$$A : U \to V$$

şeklindeki A operatörünü göz önüne alalım. Eğer her $f, g \in U$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

koşulu sağlanıyor ise A operatörüne lineer operatör denir.

1.3 Tanım

g bir fonksiyon ve A bir operatör olmak üzere

$$g \geq 0 \text{ iken } A(g) \geq 0$$

sağlanıyor ise A operatörüne pozitif operatör denir.

1.1 Lemma

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$g \leq f \Rightarrow L(g) \leq L(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$g \leq f$ olsun. $f - g \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan

$$L(f - g) \geq 0 \tag{1.1}$$

elde edilir. L operatörü lineer olduğundan

$$L(f - g) = L(f) - L(g)$$

olup Eş. 1.1 den ispat tamamlanır.

1.2 Lemma

L bir lineer pozitif operatör ise

$$\left|L(g)\right| \leq L(|g|)$$

sağlanır.

İspat

Herhangi bir g fonksiyonu için

$$-|g| \leq g \leq |g| \tag{1.2}$$

gerçeklenir. Lemma 1.1 ve Eş. 1.2 den

$$L\left(-|g|\right) \leq L(g) \leq L\left(|g|\right) \tag{1.3}$$

bulunur. L lineer olduğundan

$$L\left(-|g|\right) = -L\left(|g|\right)$$

dir. Bu ifadenin Eş. 1.3 de kullanılmasıyla

$$-L\left(|g|\right) \leq L(g) \leq L\left(|g|\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

1.4 Tanım

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $g \in C[a,b]$ olmak üzere

$$\|g\|_{C[a,b]} = \underset{a \leq x \leq b}{maks} |g(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

1.5 Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $g_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan (g_n) dizisine fonksiyon dizisi denir.

1.6 Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_n : X \to Y$, $A_n(f;x) = (A_n(f))(x)$ şeklinde tanımlanan (A_n) dizisine operatör dizisi denir.

1.7 Tanım

Her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = \lim_{n\to\infty} \underset{a\le x\le b}{maks} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (g_n) fonksiyonlar dizisi g fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir. Bu

$$g_n(x) \overset{\to}{\underset{\to}{}} g(x)$$

ile gösterilir.

1.8 Tanım

$$\varphi_{n,s}(x) = L_n\left((t-x)^s ; x\right) , \{s = 0,1,2,...\} \tag{1.4}$$

ile tanımlanan ifadelere (L_n) operatör dizisinin s-yinci merkezi momentleri denir [Lorentz, 1953].

1.1 Teorem (P.P. Korovkin 1953)

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \tag{1.5}$$

olsun. Eğer (L_n) lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a,b]$ için

i. $\quad L_n(1,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} 1$

ii. $\quad L_n(t,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} x$

iii. $\quad L_n(t^2,x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} x^2$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de $L_n(f;x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(x)$ dir.

İspat

Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki, $|t-x| \leq \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

olur. Eş. 1.5 ve üçgen eşitsizliğinden

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|f\left(t\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|\leq 2M_f \qquad (1.6)$$

yazabiliriz. Eğer, $\left|t-x\right|>\delta$ ise $\dfrac{\left|t-x\right|}{\delta}>1$ olacağından

$$\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2}>1 \qquad (1.7)$$

olur. Eş. 1.6 ve Eş. 1.7 den

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2M_f\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$\left|t-x\right|\leq\delta$ için $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$

$\left|t-x\right|>\delta$ için $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2M_f\dfrac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2}$

olur. Dolayısıyla her $x,t\in\left[a,b\right]$ için

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon+2M_f\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2} \qquad (1.8)$$

gerçeklenir. (i), (ii), (iii) koşullarını sağlayan $\left(L_n\right)$ operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f\right)-f\right\|_{C\left[a,b\right]}=0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Şimdi bunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| &= \left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)+L_n\left(f(x);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)\right| \\ &= \left|L_n\left(f(t);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)+L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right| \\ &= \left|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)+f(x)\left(L_n(1;x)-1\right)\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le \left|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)\right|+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

yazılabilir. Lemma 1.2 den

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

olup, Eş. 1.5 den

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right|$$

yazabiliriz. $\left(L_n\right)$ monoton artan olduğundan Eş. 1.8 den

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right| \qquad (1.9)$$

olur. Diğer taraftan $\left(L_n\right)$ lineer olduğundan

$$\begin{aligned}L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon L_n\left(1;x\right) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right) - x^2 - x^2 + 2x^2\right.\\
&\quad\left. -2xL_n\left(t;x\right) + x^2 L_n\left(1;x\right)\right\}\\
&= \varepsilon L_n\left(1;x\right) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right) - x^2 + 2x^2\right.\\
&\quad\left. -2xL_n\left(t;x\right) + x^2 L_n\left(1;x\right) - x^2\right\}\\
&= \varepsilon L_n\left(1;x\right) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right)\right.\\
&\quad\left. +2x\left(x - L_n\left(t;x\right)\right) + x^2\left(L_n\left(1;x\right) - 1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Bu son ifadeyi Eş. 1.9 da kullanacak olursak

$$
\begin{aligned}
\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right) - f\left(x\right)\right| \le \varepsilon L_n\left(1;x\right) &+ 2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right) - x^2\right)\right.\\
&\left. +2x\left(x - L_n\left(t;x\right)\right) + x^2\left(L_n\left(1;x\right) - 1\right)\right\}\\
&+ M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right) - 1\right)\right|
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

elde edilir. (i), (ii), (iii) koşullarını Eş. 1.10 da kullanırsak

$$
\left\|L_n\left(f\right) - f\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\{\underset{a\le x\le b}{maks}\left|L_n\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right|\right\} = 0
$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

2. $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $q-$Bernstein polinomları tanıtılarak Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir.

2.1. $q-$ Bernstein Polinomları

2.1 Tanım

Kabul edelim ki; $x \in [0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve $0 < q < 1$ olsun.

$$B_n(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \tag{2.1}$$

ifadesine $q-$Bernstein polinomu denir [Philips, 1996]. Burada

$$[k]_q = \begin{cases} \dfrac{\left(1-q^k\right)}{\left(1-q\right)} & , \quad q \neq 1 \\ k & , \quad q = 1 \end{cases} ,$$

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q \ldots [1]_q & , \quad k = 1,2,\ldots \\ 1 & , \quad k = 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} \quad \left(n \geq k \geq 0\right)$$

şeklindedir [Andrews, Askey and Roy, 1999].

2.2. $q-$ Bernstein Polinomlarının Düzgün Yakınsaklığı

2.1 Teorem

Eş. 2.1 ile verilen $q-$ Bernstein polinomları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [Philips, 1996].

i. $B_n(1;q;x)=1$

ii. $B_n(t;q;x)=x$

iii. $B_n(t^2;q;x)=x^2+\dfrac{x(1-x)}{[n]_q}$

İspat

i. Sonlu binom teoreminden

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

dir. Burada

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dir. Şimdi bir q paremetresi kullanarak kabul edelim ki

$$yx=qxy \quad , \quad xq=qx \quad , \quad yq=qy$$

olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, $q-$ Binom katsayıları olmak üzere

$$\left(x+y\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q} x^{k} y^{n-k}$$

olarak tanımlayalım. Bu eşitlikte y yerine $1-x$ alalım.

$$\left(x+1-x\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q} x^{k}\left(1-x\right)^{n-k}=1^{n}=1$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\left(x+xy\right)^{n}=x^{n}\left(1+y\right)\left(1+qy\right)...\left(1+q^{n-1}y\right)$$

dir. Şimdi bunları ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\left(x+xy\right)^{n} &= \left(x+xy\right)...\left(x+xy\right)\left(x+xy\right)\left(x+xy\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(1+y\right)x\left(1+y\right)x\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(1+y\right)x\left(x+yx\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(1+y\right)x\left(x+qxy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(1+y\right)x\left(x+xqy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(1+y\right)x^{2}\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(x+yx\right)x\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(x+qxy\right)x\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x\left(x+xqy\right)x\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x^{2}\left(1+qy\right)x\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x^{2}\left(x+qyx\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x^{2}\left(x+qqxy\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x^{2}\left(x+qxqy\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right) \\
&= x\left(1+y\right)...x^{2}\left(x+xqqy\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left(1+y\right)...x^3\left(1+q^2y\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right)\\
&\quad ...\\
&= x^n\left(1+q^{n-1}y\right)...\left(1+q^2y\right)\left(1+qy\right)\left(1+y\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

$$\left(x+xy\right)^n = x^n\left(1+y\right)\left(1+qy\right)...\left(1+q^{n-1}y\right)$$

ifadesinde y yerine $-x$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\left(x-x^2\right)^n &= x^n\left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-1}x\right)\\
x^n\left(1-x\right)^n &= x^n\left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-1}x\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada da n yerine $n-k$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left(1-x\right)^{n-k} &= \left(1-x\right)\left(1-qx\right)...\left(1-q^{n-k-1}x\right)\\
\left(1-x\right)^{n-k} &= \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu sonuç

$$\left(x+1-x\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\left(1-x\right)^{n-k} = 1$$

ifadesinde kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right) = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$B_n\left(1;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[n\right]_q!}{\left[n-k\right]_q!\left[k\right]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)=1 \tag{2.2}$$

bulunur.

ii.

$$\begin{aligned}B_n\left(t;q;x\right)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\frac{\left[n\right]_q!}{\left[n-k\right]_q!\left[k\right]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[n-1\right]_q!}{\left[n-k\right]_q!\left[k-1\right]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\\&\underset{k\to k+1}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left[n-1\right]_q!}{\left[n-k-1\right]_q!\left[k\right]_q!}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(1-q^sx\right)\\&=x\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(1-q^sx\right)\\&=x\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$B_n\left(t;q;x\right)=x \tag{2.3}$$

olur.

iii.

$$B_n\left(t^2;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]_q^2}{\left[n\right]_q^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{q[k-1]_q+1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{q[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{q[k-1]_q}{[n]_q} \frac{[n-2]_q![n-1]_q}{[n-k]_q![k-2]_q![k-1]_q} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n]_q} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{[n-2]_q!}{[n-k]_q![k-2]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)}_{k \to k+2}$$

$$+ \frac{1}{[n]_q} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{[n-1]_q!}{[n-k]_q![k-1]_q!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1-q^s x\right)}_{k \to k+1}$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{[n-2]_q!}{[n-k-2]_q![k]_q!} x^{k+2} \prod_{s=0}^{n-k-3} \left(1-q^s x\right)$$

$$+ \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q!}{[n-k-1]_q![k]_q!} x^{k+1} \prod_{s=0}^{n-k-2} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-3} \left(1-q^s x\right)$$

$$+ \frac{1}{[n]_q} x \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-2} \left(1-q^s x\right)$$

$$= \frac{q[n-1]_q}{[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x$$

$$= \frac{[n]_q - 1}{[n]_q} x^2 + \frac{1}{[n]_q} x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{[n]_q}\right) x^2 + \frac{x}{[n]_q}$$
$$= x^2 - \frac{x^2}{[n]_q} + \frac{x}{[n]_q}$$
$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

dir. Yani

$$B_n\left(t^2; q; x\right) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \tag{2.4}$$

olur.

Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2 Teorem

Eğer $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n^n = c$ $(c \neq 1)$ sağlanıyor ise $B_n(f; q_n; x)$ $q-$Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığında sürekli ve tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı $|f| \leq M_f$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,1]$ ise

$$B_n(f; q_n; x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(x)$$

gerçeklenir [Philips, 1996].

İspat

Bu teoremin sağlanabilmesi için $B_n(f; q; x)$ in lineer ve pozitif olduğunu göstermek yeterlidir.

Lineerlik:

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ ve $f,g\in C\left[0,1\right]$ için

$$\begin{aligned}
B_n\left(af\left(t\right)+bg\left(t\right);q;x\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(af\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)+bg\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(af\right)\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad +\sum_{k=0}^{n}\left(bg\right)\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&= a\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad +b\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&= aB_n\left(f\left(t\right);q;x\right)+bB_n\left(g\left(t\right);q;x\right)
\end{aligned}$$

olduğundan $\left(B_n\right)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik:

$k=0,1,...,n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\left[0,1\right]$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\geq 0$$

olduğundan $f\geq 0$ ise

$$B_n\left(f;q;x\right) \geq 0$$

olur. Yani, $B_n\left(f;q;x\right)$ pozitif bir operatördür.

Teorem 2.2 nin koşullarını sağlayan q_n dizisine örnek olarak $q_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)$ dizisini verebiliriz. Burada $0 < q_n < 1$ olup

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \text{ ve } e^{-1} = c \text{ , } c \neq 1 \text{ dir.}$$

2.3 Teorem

$q-$Bernstein polinomları için merkezi momentlerin ilk üçü

$$\varphi_{n,0}\left(x\right) = 1$$

$$\varphi_{n,1}\left(x\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$\varphi_{n,2}\left(x\right) = \frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q} \tag{2.6}$$

şeklindedir.

İspat

$$B_n\left(\left(t-x\right)^0;q;x\right) = B_n\left(1;q;x\right)$$

olduğundan Eş. 2.2 den

$$\varphi_{n,0}\left(x\right) = 1$$

dir.

$$B_n\left((t-x);q;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)-\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$=B_n\left(t;q;x\right)-xB_n\left(1;q;x\right)$$

yazılabilir. Eş. 2.2 ve Eş.2.3 den

$$B_n\left((t-x);q;x\right)=x-x$$

olduğundan

$$\varphi_{n,1}\left(x\right)=0$$

dır.

$$B_n\left((t-x)^2;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$+x^2\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$
$$=B_n\left(t^2;q;x\right)-2x.x+x^2B_n\left(1;q;x\right)$$

olup Eş. 2.2 , Eş. 2.3 ve Eş.2.4 den

$$B_n\left(\left(t-x\right)^2;q;x\right)=x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}-2x^2+x^2$$

olduğundan

$$\varphi_{n,2}\left(x\right)=\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

3. $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM HIZI

Bu bölümde, $q-$ Bernstein polinomlarının yaklaşım hızını süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli ve f in Lipschitz sınıfından olması durumunda hesaplanacaktır. Ayrıca f in konveks bir fonksiyon olması halinde $q-$ Bernstein polinomlarının monotonluğu incelenecektir. İlk olarak süreklilik modülünün tanımını ve bazı özelliklerini ispatları ile birlikte verelim.

3.1. Süreklilik Modülü

3.1 Tanım

$f \in C[a,b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\leq\delta}} \left| f(t) - f(x) \right| \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $\omega(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$

iii. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

iv. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v. $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$

vi. $\left| f(t) - f(x) \right| \leq \omega(f;|t-x|)$

vii. $\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

İspat

i. Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan ispat açıktır.

ii. $\delta_1 \le \delta_2$ için $|t-x| \le \delta_2$ bölgesinin $|t-x| \le \delta_1$ bölgesinden daha büyük olduğu açıktır. Bölge büyüdükçe alınan supremum büyüyeceğinden ispat tamamlanır.

iii. Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\le m\delta}} \left|f(t)-f(x)\right|$$

yazabiliriz.

$$|t-x| \le m\delta \Rightarrow x-m\delta \le t \le x+m\delta$$

olup, $t = x+mh$ seçimiyle $|h| \le \delta$ ve

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |h|\le\delta}} \left|f(x+mh)-f(x)\right|$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan

$$\sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |h|\le\delta}} \left|f(x+mh)-f(x)\right| = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |h|\le\delta}} \left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[f\left(x+(k+1)h\right)-f(x+kh)\right]\right|$$

olup sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |h|\le\delta}}\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right|\le\sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |h|\le\delta}}\left|f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right|$$

$$\le\omega\left(f;\delta\right)+\ldots+\omega\left(f;\delta\right)$$

bulunur. Buradan

$$\omega\left(f;m\delta\right)\le m\omega\left(f;\delta\right)$$

elde edilir.

iv. $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ sayısının tam kısmını $\left[\left|\lambda\right|\right]$ ile gösterirsek bu durumda

$$\left[\left|\lambda\right|\right]\le\lambda<\left[\left|\lambda\right|\right]+1$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu açıktır. Şimdi bu eşitsizliklerden ve (ii) özelliğinde ispat ettiğimiz $\omega\left(f;\delta\right)$ nın azalmayan fonksiyon olmasını kullanırsak

$$\omega\left(f;\lambda\delta\right)\le\omega\left(f;\left(\left[\left|\lambda\right|\right]+1\right)\delta\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. $\left[\left|\lambda\right|\right]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliğini uygulayabiliriz. Bu durumda

$$\omega\left(f;\left(\left[\left|\lambda\right|\right]+1\right)\delta\right)\le\left(\left[\left|\lambda\right|\right]+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ için

$$\left[|\lambda|\right]+1<\lambda+1$$

olduğunu hesaba katarsak

$$\omega\Big(f;\big(\left[|\lambda|\right]+1\big)\delta\Big)\leq(\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği geçerli olur. Sonuç olarak

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$$

yazılır ki, bu da ispatı tamamlar.

v. $|t-x|\leq\delta$ eşitsizliğindeki δ nın sıfıra yaklaşması $t\to x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımına göre $t\to x$ için $|f(t)-f(x)|\to 0$ olduğundan ispat açıktır.

vi. $\omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta=|t-x|$ seçersek

$$\omega(f;|t-x|)=\sup_{x\in[a,b]}|f(t)-f(x)|$$

elde edilir. O halde $|f(t)-f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f;|t-x|)$ olacağından ispat aşikardır.

vii. (vi) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)|\leq\omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliğini kullanırsak

$$\left|f(t)-f(x)\right| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

3.2. $q-$ Bernstein Polinomlarının Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, Eş. 2.2 ile verilen $q-$ Bernstein polinomlarının yaklaşma hızı Eş. 3.1 ile tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

3.1 Teorem (Philips 1996)

Eğer $f \in C[0,1]$ ise $q-$ Bernstein polinomlarının süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\left\|B_n(f;q_n;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]} \leq \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

olarak hesaplanır. Burada $0<q_n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n=c$ $(c\neq 1)$ dir.

İspat

Teoremin ispatı Popoviciu'nun tekniği ile yapılacaktır [Popoviciu, 1935].

$$B_n(f;q;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right), \qquad 0\leq x\leq 1$$

olduğundan

$$B_n\left(1;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

olur. Dolayısıyla lineerlikten

$$\begin{aligned}\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)-f\left(x\right)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\geq 0\ ,\ x^k\geq 0 \text{ ve } \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\geq 0$$

olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \tag{3.2}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t=\dfrac{[k]_q}{[n]_q}$ seçimiyle

$$\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$$

yazılabilir. Bu sonucu Eş. 3.2 de yerine yazarsak ve lineer pozitif operatörlerin monotonluğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}\omega(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\ &\quad+\sum_{k=0}^{n}\omega(f;\delta)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\begin{aligned} \left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right. \\ &\quad\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\} \\ &=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right. \\ &\quad\left.+B_n(1;q;x)\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

olup buradan

$$\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| \le \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)+1\right\} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu ifade de

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

denirse

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\left(\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılır. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$T\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup Eş. 2.2 den

$$T\le\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu sonuç Eş. 3.4 de yerine yazılırsa

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

olur. Diğer yandan

$$\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2=\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}\\
&=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\right.\right.\\
&\qquad-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\\
&\qquad\left.\left.+x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^sx\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}\\
&=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(B_n\left(t^2;q;x\right)-2xB_n\left(t;q;x\right)+x^2B_n\left(1;q;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitlikte Eş. 2.2 , Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 ün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}-2x.x+x^2.1\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}\\
&=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\frac{x(1-x)}{[n]_q}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $x \in [0,1]$ için

$$\underset{0\le x\le 1}{maks}\left\{\left(x(1-x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{1}{2}$$

olacağından

$$\left\|B_n(f;q;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]}\le \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\frac{1}{2}+1\right\}$$

elde edilir. $\delta=\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}$ ve $q=q_n$ seçimiyle

$$\left\|B_n(f;q_n;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]}\le \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

3.3. q – Bernstein Polinomlarının Peetre-K Fonksiyoneli ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, $q-$Bernstein polinomlarının Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızı incelenecektir. Bu nedenle öncelikle Peetre-K fonksiyonelinin tanımını verelim [Bleimann, Butzer and Hahn, 1980].

3.2 Tanım

$f \in C[a,b]$ ve $\delta \ge 0$ olmak üzere

$$K\left(f;\delta\right)=\inf_{g\in C^2[a,b]}\left\{\|f-g\|_{C[a,b]}+\delta\|g\|_{C^2[a,b]}\right\}$$

ifadesine Peetre-K fonksiyoneli denir. Burada

$$\|g\|_{C^2[a,b]}=\|g\|_{C[a,b]}+\|g'\|_{C[a,b]}+\|g''\|_{C[a,b]}$$

ile verilir.

3.2 Teorem

Eğer $f\in C[0,1]$ ise

$$\left\|B_n\left(f;q_n;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C^2[0,1]}\leq 2K\left(f;\left(\frac{1}{16[n]_q}\right)\right) \tag{3.5}$$

gerçeklenir. Burada $K\left(f;\left(\frac{1}{16[n]_q}\right)\right)$ Peetre-K fonksiyonelidir.

Önce bu ispatta kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

3.1 Lemma (İntegral bağıntısı)

$g\left(x\right)$ fonksiyonu $\left[0,A\right]$ aralığında ikinci basamaktan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$g\left(t\right)-g\left(x\right)=g'\left(x\right)\left(t-x\right)+\int_x^t g''\left(s\right)\left(t-s\right)ds \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$t-s=u$ ise $-ds=du$ ve $g''(s)\,ds=dv$ ise $g'(s)=v$ dir. O halde

$$\begin{aligned}\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds &= (t-s)\,g'(s)\Big|_x^t+\int_x^t g'(s)\,ds\\ &= (t-s)\,g'(s)\Big|_x^t+g(s)\Big|_x^t\\ &= -(t-x)\,g'(x)+g(t)-g(x)\end{aligned}$$

olup buradan

$$g(t)-g(x)=g'(x)(t-x)+\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds$$

yazabiliriz. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi teoremin ispatına geçelim.

İspat (3.2. Teorem)

(B_n) operatörü Eş. 3.6 integral eşitliğine uygulanırsa

$$B_n\left(g(t)-g(x);q;x\right)=B_n\left(g'(x)(t-x);q;x\right)+B_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;q;x\right)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanının mutlak değeri alınacak olursa

$$\begin{aligned}\left|B_n\left(g(t)-g(x);q;x\right)\right| &= \left|B_n\left(g'(x)(t-x);q;x\right)\right| \\ &\quad +\left|B_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;q;x\right)\right| \\ &\leq \left\|g'\right\|_{C[0,1]}\left|B_n\left((t-x);q;x\right)\right| \\ &\quad +\left\|g''\right\|_{C[0,1]}\left|B_n\left(\int_x^t (t-s)\,ds;q;x\right)\right|\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_x^t (t-s)\,ds = -\frac{(t-s)^2}{2}\Bigg|_x^t = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu sonuç Eş. 3.7 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left|B_n\left(g(t)-g(x);q;x\right)\right| &\leq \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\left\|g''\right\|_{C[0,1]} B_n\left(\frac{(t-x)^2}{2};q;x\right) \\ &= \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left\|g''\right\|_{C[0,1]} B_n\left(t^2-2xt+x^2;q;x\right) \\ &= \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left\|g''\right\|_{C[0,1]}\left\{B_n\left(t^2;q;x\right)\right. \\ &\quad \left.-2xB_n\left(t;q;x\right)+x^2B_n\left(1;q;x\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Eş. 2.2 , Eş. 2.3 ve Eş. 2.4 den

$$\left|B_n\left(g;q;x\right)-g(x)\right| \leq \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|\varphi_{n,2}(x)\right|\left\|g''\right\|_{C[0,1]}$$

yazılabilir. Burada Eş. 2.5 ve Eş. 2.6 kullanılırsa

$$\left|B_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{2}\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}\left\|g''\right\|_{C[0,1]}$$

bulunur.

$$\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}=\left\|g\right\|_{C[0,1]}+\left\|g'\right\|_{C[0,1]}+\left\|g''\right\|_{C[0,1]}$$

olduğundan

$$\left|B_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{2}\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \tag{3.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)+B_n\left(g;q;x\right)-B_n\left(g;q;x\right)+g\left(x\right)-g\left(x\right)\right|$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|=\Big|&\left(B_n\left(f;q;x\right)-B_n\left(g;q;x\right)\right)\\&+\left(-f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)+\left(B_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right)\Big|\end{aligned}$$

diyebiliriz. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|B_n\left(f-g;q;x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|+\left|B_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|$$

bulunur. $\left(B_n\right)$ lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| &\le \left\|f-g\right\|_{C[0,1]}\left|B_n\left(1;q;x\right)\right| \\ &+\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\left|B_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|\end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. Eş. 3.10 da Eş. 2.2 ve Eş. 3.9 un kullanılmasıyla

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| \le 2\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}$$

elde edilir. O halde

$$\left\|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]} \le 2\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{\left[n\right]_q}\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}$$

bulunur. Her iki taraftan $g\in C^2\left[0,1\right]$ üzerinden infimum alınırsa sol taraf g den bağımsız olduğundan

$$\left\|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C^2[0,1]} \le 2K\left(f;\frac{1}{16\left[n\right]_q}\right)$$

elde edilir.

$q=q^n$, $0<q_n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n=c$ $\left(c\neq 1\right)$ alınmasıyla Eş. 3.5 ifadesi yaklaşım hızını verir.

3.2 Tanım

f konveks bir fonksiyon ise $\lambda_1,\lambda_2\in\left[0,1\right]$ ve $\lambda_1+\lambda_2=1$ olmak üzere

$$f\left(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)\le\lambda_1 f\left(\alpha_1\right)+\lambda_2 f\left(\alpha_2\right)$$

yani

$$f\left(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)-\lambda_1 f\left(\alpha_1\right)-\lambda_2 f\left(\alpha_2\right)\leq 0$$

gerçeklenir.

3.3 Teorem

Eğer f konveks bir fonksiyon ise $B_n\left(f;q;x\right)$, n ye göre monoton azalandır. Yani, her n doğal sayısı için

$$B_{n+1}\left(f;q;x\right)-B_n\left(f;q;x\right)\leq 0$$

gerçeklenir.

İspat

$$B_n\left(f;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\ ,\ 0\leq x\leq 1$$

Burada $k=n$ ise $\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)=1$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}B_{n+1}\left(f;g;x\right)-B_n\left(f;q;x\right)=&\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)\\&-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\left(1-q^{n-k}x+q^{n-k}x\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} q^{n-k} \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$=f\left(0\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 \prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)$$

$$+\sum_{\substack{k=1 \\ k\to k+1}}^{n+1} f\left(\frac{[k]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)$$

$$-f\left(0\right)\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 \prod_{s=0}^{n}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\underset{k\to k+1}{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q} x^k \prod_{s=0}^{n-k}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} q^{n-k} \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1} \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1} \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} q^{n-k} \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(1)\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q x^{n+1} \\
&\quad+\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad- f(1)\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q x^{n+1}q^0 \\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1}q^{n-k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&=\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&\quad-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1}q^{n-k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q - f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q \right. \\
&\quad\left. - f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{n-k}\right\} x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\frac{[n+1]_q}{[k+1]_q}=\frac{[n]_q\,[n+1]_q}{[k+1]_q\,[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{3.12}
$$

$$
\frac{[n]_q}{[k+1]_q}=\frac{[n]_q}{[k+1]_q}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{3.13}
$$

$$\frac{[n]_q}{[k]_q}=\frac{[n]_q}{[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{3.14}$$

olup Eş. 3.12 , Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 un Eş. 3.11 de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} B_{n+1}(f;q;x)-B_n(f;q;x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)\frac{[n]_q[n+1]_q}{[k+1]_q[n-k]_q} - f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\frac{[n]_q}{[k+1]_q}\right. \\ &\quad \left. -f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\frac{[n]_q}{[n-k]_q}q^{n-k}\right\}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{ f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right) - f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\frac{[n-k]_q}{[n+1]_q}\right. \\ &\quad \left. -f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}q^{n-k}\right\}\frac{[n]_q[n+1]_q}{[k+1]_q[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} \\ &\quad \times\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir.

$$\lambda_1=\frac{[n-k]_q}{[n+1]_q}\ ,\ \lambda_2=\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}q^{n-k}\ ,\ \alpha_1=\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\ ,\ \alpha_2=\frac{[k]_q}{[n]_q}$$

seçimiyle

$$\lambda_1+\lambda_2=1 \text{ ve } \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}$$

olup, f konveks olduğundan Tanım 3.3 den

$$f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\right)-f\left(\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\right)\frac{[n-k]_q}{[n+1]_q}-f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\frac{[k+1]_q}{[n+1]_q}\leq 0$$

yazılabilir. Eş. 3.15 de

$$\frac{[n]_q\,[n+1]_q}{[k+1]_q\,[n-k]_q}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)>0$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Eğer f lineer ise $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ ve $\lambda_1+\lambda_2=1$ olmak üzere

$$f\left(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\lambda_1 f\left(\alpha_1\right)+\lambda_2 f\left(\alpha_2\right)$$

eşitliği sağlanacağından dolayı aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç

Eğer f lineer ise bu durumda,

$$B_{n+1}\left(f;q;x\right)-B_n\left(f;q;x\right)=0$$

dır. Teorem 3.3 de yapılanlar Meyer-König ve Zeller operatörü ve Szasz operatörü için Cheney ve Sharma tarafından yapılmıştır [Cheney and Sharma, 1964]. $q-$Meyer-König ve Zeller operatörü için Doğru ve Gupta tarafından yapılmıştır [Doğru and Gupta, 2006].

3.4. $q-$ Bernstein Polinomlarının Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar için $q-$Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna yaklaşma hızını hesaplayacağız. Öncelikle Lipschitz sınıfının tanımını verelim.

3.4 Tanım

(Lipschitz sınıfı fonksiyonlar) : $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha} \tag{3.16}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M ye de Lipschitz sabiti denir ve $f\in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4 Teorem

$f\in Lip_M(\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$\left\|B_n(f;q_n;x)-f(x)\right\|_{C[0,1]}=O\left(\left(\frac{1}{4[n]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{3.17}$$

gerçeklenir.

İspat

$$B_n(1;q;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)=1$$

olduğundan

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)-f\left(x\right)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right|$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \geq 0 \quad , \quad x^k \geq 0 \quad \text{ve} \quad \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \geq 0$$

olduğundan üçgen eşitsizliğini kullanacak olursak

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) \tag{3.18}$$

olur. Eş. 3.16 da $t=\dfrac{[k]_q}{[n]_q}$ seçimiyle

$$\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f\left(x\right)\right| \leq M\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği Eş. 3.18 de kullanacak olursak

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| \leq M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\} \tag{3.19}$$

elde edilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçilirse $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ dir ve Eş. 3.19 dan

$$
\begin{aligned}
\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\leq M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&= M\sum_{k=0}^{n}\left\{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Son eşitliğe Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right| &\leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&= M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}\left\{B_n(1;q;x)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

olur. Eş. 2.2 den

$$
\left|B_n(f;q;x)-f(x)\right|\leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}
$$

$$\leq M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2\frac{[k]_q}{[n]_q}x+x^2\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right.$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$\left.+x^2\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M\left\{B_n\left(t^2;q;x\right)-2xB_n\left(t;q;x\right)+x^2B_n\left(1;q;x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. Eş. 2.2 , Eş. 2.3 ve Eş.2.4 ten

$$\left|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left\{x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}-2x^2+x^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= M\left\{\frac{x(1-x)}{[n]_q}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. $x\in[0,1]$ olduğundan $\underset{0\leq x\leq 1}{maks}\, x(1-x)=\dfrac{1}{4}$ dir. O halde

$$\left\|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]}\leq M\left(\frac{1}{4[n]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Yani

$$\left\| B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]}=O\left(\left(\frac{1}{4[n]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. Eğer $q=q^n$, $0<q^n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n=c$ $\left(c\neq 1\right)$ seçilirse Eş. 3.17 yaklaşım hızı veren bir ifade olur.

4. $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ KING TİPLİ GENELLEŞMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

P. P. Korovkin teoremine göre; eğer $\{L_n\}$, $C([a,b])$ üzerinde tanımlı lineer pozitif operatör ise $\forall f \in C([a,b])$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|L_n(f)-f\right\|_{C[a,b]}=0$ olması için gerek ve yeterli koşul $e_i(x)=x^i$, $i=0,1,2$ test fonksiyonları için $L_n(e_i(x)) \rightrightarrows e_i(x)$ olmasıdır. Bir çok lineer pozitif operatör dizisi $e_0(x)=1$ ve $e_1(x)=x$ test fonksiyonlarının yaklaşımını koruduğu halde $e_2(x)=x^2$ fonksiyonu için limit durumunda bir yaklaşım korunur. Yani

$$
\begin{aligned}
&L_n(e_0)(x)=e_0(x) \\
&L_n(e_1)(x)=e_1(x) \\
&\lim_{n\to\infty} L_n(e_2)(x)=e_2(x)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. J. P. KING, (2003) bu tip operatörlerin $e_2(x)=x^2$ fonksiyonunu koruyacak şekilde genelleştirmelerinin yapılabileceğini göstermiştir. Bu bölümde $q-$Bernstein polinomlarının King tipli genelleşmesini elde edip, elde ettiğimiz genelleştirilmiş polinomun yaklaşım hızını süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli ve f in Lipschitz sınıfından olması durumunda hesaplayacağız.

4.1. $q-$ Bernstein Polinomlarının King Tipli Genelleşmesi

$C[0,1]$ de tanımlı $q-$Bernstein polinomlarının King tipli genelleşmesi (V_n) olmak üzere; $V_n(e_0;q;x)=e_0$ ve $V_n(e_2;q;x)=e_2$ olacak şekilde ki polinomları elde etmek istiyoruz. Burada amacımız $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|V_nf-f\right\|_{C[0,1]}=0$ olduğunda elde ettiğimiz yaklaşım derecesinin en az $B_n(f;q;x)$ lineer pozitif operatör dizisinin f ye yaklaşım derecesi kadar iyi olduğunu gözlemlemektir.

4.1 Tanım

$\{r_n(x)\}$, $[0,1]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi ve $0 \le r_n(x) \le 1$ olsun. $f \in C[0,1]$, $0 \le x \le 1$, $0 < q < 1$ için $V_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ operatörü

$$V_n(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1 - q^s (r_n(x))\right) \tag{4.1}$$

olarak tanımlansın. $(r_n(x)) = x$ özel durumu için bu polinom $q-$Bernstein polinomuna denktir. Dolayısıyla da (V_n) operatörü için

i. $$V_n(e_0;q;x) = 1 \tag{4.2}$$

ii. $$V_n(e_1;q;x) = r_n(x) \tag{4.3}$$

iii. $$V_n(e_2;q;x) = (r_n(x))^2 + \frac{r_n(x)(1 - r_n(x))}{[n]_q} \tag{4.4}$$

dir.

4.1 Teorem

$\forall f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} V_n(f)(x) = f(x)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = x$ olmasıdır. Bu durumda (V_n) lineer pozitif operatör dizisi için Korovkin teoremi sağlanır. $r_n(x)$ yerine $r_n^*(x)$

$$\begin{cases} r_1^*(x) &= x^2 \\ r_n^*(x) &= -\dfrac{1}{2\left([n]_q - 1\right)} + \sqrt{\dfrac{1}{4\left([n]_q - 1\right)^2} + \dfrac{[n]_q}{[n]_q - 1} x^2}, n = 2,3,... \end{cases} \tag{4.5}$$

şeklinde seçilirse $V_n\left(e_2;q;x\right)=e_2\left(x\right)=x^2$, $n=1,2,...$ elde edilir. Eş. 4.5 ile verilen $r_n^*\left(x\right)$ ifadesi $0\le x\le 1$ için $0\le r_n^*\left(x\right)\le 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^*\left(x\right)=x$ şeklindedir.

İspat

$r_n^*\left(x\right)$ in Eş. 4.5 şeklinde olduğunu görebilmek için $V_n\left(e_2;q;x\right)=e_2\left(x\right)=x^2$ olacak şekilde ki $r_n^*\left(x\right)$ i bulmalıyız. Bunun için

$$V_n\left(e_2;q;x\right)=\left(r_n\left(x\right)\right)^2+\frac{r_n\left(x\right)\left(1-r_n\left(x\right)\right)}{\left[n\right]_q}=x^2$$

ifadesinde $r_n\left(x\right)$ yerine $r_n^*\left(x\right)$ yazarsak

$$\left(r_n^*\left(x\right)\right)^2+\frac{r_n^*\left(x\right)\left(1-r_n^*\left(x\right)\right)}{\left[n\right]_q}=x^2$$

elde edilir. Şimdi bu denklemi düzenleyerek, denklemi sağlayan $r_n^*\left(x\right)$ değerini elde edelim.

$$\left(r_n^*\left(x\right)\right)^2+\frac{r_n^*\left(x\right)\left(1-r_n^*\left(x\right)\right)}{\left[n\right]_q}-x^2=0$$

$$\left(1-\frac{1}{\left[n\right]_q}\right)\left(r_n^*\left(x\right)\right)^2+\frac{1}{\left[n\right]_q}\left(r_n^*\left(x\right)\right)-x^2=0$$

Buradan $r_n^*\left(x\right)$ i aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$r_n^*(x)=\frac{-\frac{1}{[n]_q}+\sqrt{\frac{1}{\left([n]_q\right)^2}+4\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2}}{2\left(\frac{[n]_q-1}{[n]_q}\right)}$$

$$=-\frac{1}{[n]_q}\frac{[n]_q}{2\left([n]_q-1\right)}+\frac{[n]_q}{2\left([n]_q-1\right)}\sqrt{\frac{1}{\left([n]_q\right)^2}+4\frac{[n]_q-1}{[n]_q}x^2}$$

$$=-\frac{1}{2\left([n]_q-1\right)}+\sqrt{\frac{1}{4\left([n]_q-1\right)^2}+\frac{[n]_q}{[n]_q-1}x^2}$$

elde edilir. Burada denklemin $r_n^*(x)$ kökünü bulurken negatif işaretli değeri almamamızın sebebi; o durumda $r_n^*(x)$ in istenen aralığa düşmeyecek olmasıdır.

4.2 Teorem

$\left(L_n(f)\right)$, $C[a,b]$ üzerinde lineer pozitif operatörlerin bir dizisi, $f\in C[a,b], x\in[a,b]$ ve $\omega(f;\delta)$ f fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere

$$\begin{aligned}\left\|L_n(f;x)-f(x)\right\|\le\left|f(x)\right|\left|L_n\left(e_0(x)-e_0\right)\right|\\+\omega(f;\delta)\left[L_n(e_0;x)+\frac{1}{\delta}\left(L_n(e_0;x)\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_n(x)\right]\end{aligned}\tag{4.6}$$

dir. Burada $\alpha_n^2(x)=L_n\left((t-x)^2;x\right)$ dir.

Şimdi Teorem 4.2 den yararlanarak (V_n) için ez az (B_n) kadar iyi bir yaklaşım derecesi elde etmeye çalışalım.

$\left(V_n\right)$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$\begin{aligned}\alpha_n^2\left(x\right) &= V_n\left(\left(t-x\right)^2;q;x\right) \\ &= V_n\left(t^2;q;x\right)-2xV_n\left(t;q;x\right)+x^2V_n\left(1;q;x\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$V_n\left(1;q;x\right)=1\ ,\ V_n\left(t;q;x\right)=r_n^*\left(x\right)\ \text{ve}\ V_n\left(t^2;q;x\right)=x^2 \tag{4.7}$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_n^2\left(x\right) &= x^2-2xr_n^*\left(x\right)+x^2 \\ &= 2x\left[x-r_n^*\left(x\right)\right]\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 ifadelerini kullanarak Eş. 4.6 eşitsizliğini $\left(V_n\right)$ polinomu için yazarsak

$$\begin{aligned}\left\|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\| &\le \left|f\left(x\right)\right|\left|1-1\right|+\omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{2x\left(x-r_n^*\left(x\right)\right)}\right] \\ &= \omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{2x\left(x-r_n^*\left(x\right)\right)}\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\|B_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|\le\omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}}\right]$$

olduğunu ikinci bölümde göstermiştik.

$V_n\left(f;q;x\right)$ in $f\left(x\right)$ e yaklaşım derecesinin en az $B_n\left(f;q;x\right)$ in $f\left(x\right)$ e yaklaşım derecesi kadar iyi olması için

$$\sqrt{2x\left(x-r_n^*\left(x\right)\right)} \leq \sqrt{\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}}$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
2x\left(x-r_n^*\left(x\right)\right) &\leq \frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}\\
2x^2-2xr_n^*\left(x\right) &\leq \frac{x-x^2}{\left[n\right]_q}\\
-r_n^*\left(x\right) &\leq \frac{1}{2\left[n\right]_q}-\frac{x}{2\left[n\right]_q}-x\\
r_n^*\left(x\right) &\geq x+\frac{x}{2\left[n\right]_q}-\frac{1}{2\left[n\right]_q}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$r_n\left(x\right)=x+\frac{x}{2\left[n\right]_q}-\frac{1}{2\left[n\right]_q} \tag{4.9}$$

olması durumunda $V_n\left(f;q;x\right)$ in $f\left(x\right)$ e yaklaşım derecesi en az $B_n\left(f;q;x\right)$ in $f\left(x\right)$ e yaklaşım derecesi kadar iyidir.

4.2. King Tipli $q-$ Bernstein Polinomlarının Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, Eş. 4.1 ile verilen King tipli $q-$Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı Eş. 3.1 ile tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

4.3 Teorem

Eğer $f \in C[0,1]$ ise King tipli $q-$Bernstein polinomlarının süreklilik modülüyle yaklaşım hızı

$$\left\|V_n\left(f;q_n;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]} \leq \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

olarak hesaplanır. Burada $0<q_n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n=c$ $\left(c\neq 1\right)$ dir.

İspat

Teoremin ispatını üçüncü bölümde yapılan ispata benzer şekilde yapacağız.

$$V_n\left(f;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(r_n\left(x\right)\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right) \ , \quad 0\leq x\leq 1$$

olduğundan

$$V_n\left(1;q;x\right)=\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(r_n\left(x\right)\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla lineerlikten

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(r_n\left(x\right)\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right. \\ &\quad \left. -f\left(x\right)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(r_n\left(x\right)\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right|\end{aligned}$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right|$$

elde edilir.

$$\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\geq 0\ ,\ \left(r_n(x)\right)^k\geq 0\ \text{ ve }\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\geq 0$$

olduğunu ve üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\tag{4.10}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (vii) özelliğinde $t=\dfrac{[k]_q}{[n]_q}$ seçimiyle

$$\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right|\leq\left(\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$$

yazılabilir. Bu sonucu Eş. 4.10 da yerine yazarsak ve lineer pozitif operatörlerin monotonluğunu kullanırsak

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}$$

$$\times\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|}{\delta}\omega\left(f;\delta\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\omega\left(f;\delta\right)\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$

bulunur. Yani

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right.$$

$$\left.+V_n\left(1;q;x\right)\right\}\tag{4.11}$$

olup buradan

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\right.$$

$$\left.\times\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)+1\right\}\tag{4.12}$$

bulunur. Bu ifadede

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)$$

denirse

$$T=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|\left(\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılır. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$T\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

olup Eş. 4.2 den

$$T\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n(x)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu sonuç Eş. 4.12 de yerine yazılırsa

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\right.\right.$$
$$\left.\left.\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

olur. Diğer yandan

$$\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right)^2=\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2$$

olduğundan

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2x\frac{[k]_q}{[n]_q}+x^2\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$
$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right.\right.$$
$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$
$$\left.\left.+x^2\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$
$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(V_n\left(t^2;q;x\right)-2xV_n\left(t;q;x\right)+x^2V_n\left(1;q;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

yazılır. Bu eşitlikte Eş. 4.2 , Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 ün kullanılmasıyla

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(x^2-2xr_n\left(x\right)+x^2.1\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$
$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\left(2x\left(x-r_n\left(x\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}+1\right\}$$

bulunur. Burada Eş. 4.9 da ki $r_n\left(x\right)$ değeri yerine yazılırsa

$$\left[2x\left(x-r_n\left(x\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[2x\left(x-\left(x+\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[2x\left(\frac{1-x}{2[n]_q}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{x\left(1-x\right)}{[n]_q}\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. $x\in\left[0,1\right]$ için

$$\underset{0\leq x\leq 1}{maks}\left\{\left(x\left(1-x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{1}{2}$$

olacağından

$$\left\|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]}\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\frac{1}{2}+1\right\}$$

elde edilir. $\delta=\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}$ ve $q=q_n$ seçimiyle

$$\left\|V_n\left(f;q_n;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]}\leq\frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

bulunur ki böylece ispat tamamlanır.

4.3. King Tipli $q-$ Bernstein Polinomlarının Peetre-K Fonksiyoneli ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, Eş. 4.1 ile verilen King tipli $q-$ Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı Eş. 3.5 ile tanımlanan Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.

4.4 Teorem

Eğer $f \in C[0,1]$ ise

$$\left\| V_n\left(f;q_n;x\right)-f\left(x\right)\right\| \leq 2K\left(f;\left(\frac{1}{16[n]_q}\right)\right) \tag{4.13}$$

gerçeklenir. Burada $K\left(f;\left(\frac{1}{16[n]_q}\right)\right)$ Peetre-K fonksiyonelidir.

İspat

Teoremin ispatını üçüncü bölümde yapılan ispata benzer şekilde yapacağız.

$\left(V_n\right)$ operatörü Eş. 3.6 integral eşitliğine uygulanırsa

$$V_n\left(g\left(t\right)-g\left(x\right);q;x\right)=V_n\left(g'\left(x\right)\left(t-x\right);q;x\right)+V_n\left(\int_x^t g''\left(s\right)\left(t-s\right)ds;q;x\right)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanının mutlak değeri alınacak olursa

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(g(t)-g(x);q;x\right)\right| &= \left|V_n\left(g'(x)(t-x);q;x\right)\right| \\ &\quad +\left|V_n\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds;q;x\right)\right| \\ &\le \|g'\|_{C[0,1]}\left|V_n\left((t-x);q;x\right)\right| \\ &\quad +\|g''\|_{C[0,1]}\left|V_n\left(\int_x^t (t-s)\,ds;q;x\right)\right|\end{aligned} \tag{4.14}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_x^t (t-s)\,ds = -\frac{(t-s)^2}{2}\Bigg|_x^t = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu sonuç Eş. 4.14 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(g(t)-g(x);q;x\right)\right| &\le \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\|g'\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\|g''\|_{C[0,1]}V_n\left(\frac{(t-x)^2}{2};q;x\right) \\ &= \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\|g'\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\frac{1}{2}\|g''\|_{C[0,1]}V_n\left(t^2-2xt+x^2;q;x\right) \\ &= \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\|g'\|_{C[0,1]} \\ &\quad +\frac{1}{2}\|g''\|_{C[0,1]}\left\{V_n\left(t^2;q;x\right)\right. \\ &\quad \left.-2xV_n(t;q;x)+x^2V_n(1;q;x)\right\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Eş. 4.2 , Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 den

$$\begin{aligned}\left|V_n(g;q;x)-g(x)\right| &\le \left|\varphi_{n,1}(x)\right|\|g'\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|\varphi_{n,2}(x)\right|\|g''\|_{C[0,1]} \\ &= \left|V_n\left((t-x);q;x\right)\right|\|g'\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|V_n\left((t-x)^2;q;x\right)\right|\|g''\|_{C[0,1]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left|V_n\left(t;q;x\right)-xV_n\left(1;q;x\right)\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left|V_n\left(t^2;q;x\right)-2xV_n\left(t;q;x\right)+x^2V_n\left(1;q;x\right)\right|\left\|g''\right\|_{C[0,1]} \\
&=\left|r_n\left(x\right)-x\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|x^2-2xr_n\left(x\right)+x^2\right|\left\|g''\right\|_{C[0,1]} \\
&=\left|r_n\left(x\right)-x\right|\left\|g'\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|2x^2-2xr_n\left(x\right)\right|\left\|g''\right\|_{C[0,1]}
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}=\left\|g\right\|_{C[0,1]}+\left\|g'\right\|_{C[0,1]}+\left\|g''\right\|_{C[0,1]}
$$

olduğundan

$$
\left|V_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\left|r_n\left(x\right)-x+x^2-xr_n\left(x\right)\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \tag{4.16}
$$

yazılabilir. Burada Eş. 4.9 ile verilen $r_n\left(x\right)$ değeri yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\left|V_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|&\leq\left|\left(x+\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)-x+x^2-x\left(x+\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \\
&=\left|\left(\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)-x\left(\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \\
&=\left|\frac{x-1-x^2+x}{2[n]_q}\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \\
&=\left|\frac{-\left(x^2-2x+1\right)}{2[n]_q}\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]} \\
&=\frac{1}{2}\left|\frac{\left(x-1\right)^2}{[n]_q}\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)+V_n\left(g;q;x\right)-V_n\left(g;q;x\right)+g\left(x\right)-g\left(x\right)\right|$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|=&\Big|\left(V_n\left(f;q;x\right)-V_n\left(g;q;x\right)\right)\\&+\left(-f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)+\left(V_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right)\Big|\end{aligned}$$

diyebiliriz. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\left|V_n\left(f-g;q;x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|+\left|V_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|$$

bulunur. $\left(V_n\right)$ lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le&\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}\left|V_n\left(1;q;x\right)\right|\\&+\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\left|V_n\left(g;q;x\right)-g\left(x\right)\right|\end{aligned}\tag{4.18}$$

olur. Eş. 4.18 de Eş. 4.2 ve Eş. 4.17 nin kullanılmasıyla

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le2\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\left|\frac{\left(x-1\right)^2}{\left[n\right]_q}\right|\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}$$

elde edilir. O halde

$$\left\|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]}\le2\left\|f-g\right\|_{C[0,1]}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{\left[n\right]_q}\left\|g\right\|_{C^2[0,1]}$$

bulunur. Her iki taraftan $g \in C^2\left[0,1\right]$ üzerinden infimum alınırsa sol taraf g den bağımsız olduğundan

$$\left\| V_n\left(f;q;x\right) - f\left(x\right) \right\|_{C^2[0,1]} \leq 2K\left(f;\frac{1}{16\left[n\right]_q}\right)$$

elde edilir.

$q = q^n$, $0 < q_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n = c$ $\left(c \neq 1\right)$ alınmasıyla Eş.4.13 ifadesi yaklaşım hızını verir.

4.4. King Tipli $q-$ Bernstein Polinomlarının Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, Eş. 4.1 ile verilen King tipli $q-$ Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı Eş. 3.16 ile tanımlanan Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplanacaktır.
4.5 Teorem

$f \in Lip_M\left(\alpha\right)$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\left\| V_n\left(f;q_n;x\right) - f\left(x\right) \right\|_{C[0,1]} = O\left(\left(\frac{1}{4\left[n\right]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{4.19}$$

gerçeklenir.

İspat

$$V_n(1;q;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)=1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right. \\ &\qquad \left. -f(x)\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right|\end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \geq 0 \quad , \quad (r_n(x))^k \geq 0 \quad \text{ve} \quad \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\geq 0$$

olduğundan üçgen eşitsizliğini kullanacak olursak

$$\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right|\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right) \tag{4.20}$$

olur. Eş. 3.16 da $t=\dfrac{[k]_q}{[n]_q}$ seçimiyle

$$\left|f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)-f(x)\right| \leq M\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği Eş. 4.20 de kullanacak olursak

$$\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right| \le M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\} \tag{4.21}$$

elde edilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçilirse $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ dir ve Eş. 4.21 den

$$\begin{aligned}
\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{\alpha}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&= M\sum_{k=0}^{n}\left\{\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitliğe Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\left|V_n(f;q;x)-f(x)\right| &\le M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&= M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^{2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (r_n(x))^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n(x)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad\times\left\{V_n(1;q;x)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.2 den

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{[k]_q}{[n]_q}-x\right|^2\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\le M\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}-2\frac{[k]_q}{[n]_q}x+x^2\right)\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q^{\,2}}{[n]_q^{\,2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right.$$

$$-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)$$

$$\left.+x^2\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(r_n\left(x\right)\right)^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s r_n\left(x\right)\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{V_n\left(t^2;q;x\right)-2xV_n\left(t;q;x\right)+x^2V_n\left(1;q;x\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. Eş. 4.2 , Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 den

$$\left|V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right|\le M\left\{x^2-2xr_n\left(x\right)+x^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{x^2-2x\left(x+\frac{x}{2[n]_q}-\frac{1}{2[n]_q}\right)+x^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\left(\frac{x-x^2}{[n]_q}\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=M\left\{\left(\frac{x\left(1-x\right)}{[n]_q}\right)\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. $x\in\left[0,1\right]$ olduğundan $\underset{0\le x\le 1}{maks}\,x\left(1-x\right)=\frac{1}{4}$ dir. O halde

$$\left\| V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]} \leq M\left(\frac{1}{4[n]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Yani

$$\left\| V_n\left(f;q;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,1]} = O\left(\left(\frac{1}{4[n]_q}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. Eğer $q = q^n$, $0 < q^n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^n = c$ $\left(c \neq 1\right)$ seçilirse Eş. 4.19 yaklaşım hızı veren bir ifade olur.

Sonuç

$q-$Bernstein polinomunun King tipli genelleşmesi için Eş. 4.9 ile verilen $r_n\left(x\right)$ değeri ile elde ettiğimiz yaklaşımlar $q-$Bernstein polinomu için elde edilen yaklaşımlar ile aynı hızdadır. King tipli $q-$Bernstein polinomu $e_2 = x^2$ fonksiyonunu koruyan bir polinom olduğundan yaklaşım özellikleri incelenirken daha kolay hesaplama yapma imkanı sunar.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Volkov teoremi ifade ve ispat edilecektir. Daha sonra iki değişkenli $q-$Bernstein polinomları tanıtılarak Volkov teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri inceleyeceğiz.

5.1 Teorem (V.I. Volkov 1957)

$f(x,y)\in C(a,b;c,d)$ ve tüm reel eksende $|f(x,y)|\leq M_f$ olsun. $L_n(f(t,r);x,y)$ lineer pozitif operatör dizisi için düzgün olarak

i. $\quad L_n(1;x,y) \rightrightarrows 1$

ii. $\quad L_n(t;x,y) \rightrightarrows x$

iii. $\quad L_n(r;x,y) \rightrightarrows y$

iv. $\quad L_n(t^2+r^2;x,y) \rightrightarrows x^2+y^2$

koşulları sağlanıyorsa her $f(x,y)\in C(a,b;c,d)$ için

$$L_n(f(t,r);x,y) \rightrightarrows f(x,y)$$

olur.

İspat

$f\left(x,y\right)\in C\left(a,b;c,d\right)$ olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta$ vardır ki $\left|\left(x,y\right)-\left(t,r\right)\right|<\delta$ yani $\sqrt{\left(x-t\right)^2+\left(y-r\right)^2}<\delta$ kaldığında

$$\left|f\left(t,r\right)-f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$$

sağlanır.

$$\sqrt{\left(x-t\right)^2+\left(y-r\right)^2}\geq\delta$$

olduğunda

$$\frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-r\right)^2}{\delta^2}\geq 1$$

olup,

$$\left|f\left(x,y\right)\right|\leq M_f$$

olduğunun kullanılmasıyla

$$\left|f\left(t,r\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq 2M_f\left[\frac{\left(x-t\right)^2+\left(y-r\right)^2}{\delta^2}\right]$$

yazılabilir. O halde her durumda

$$\begin{aligned}\left|f(t,r)-f(x,y)\right| &\le \varepsilon+2M_f\left[\frac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\right]\\ &=\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[x^2+y^2-2(xt-yr)+t^2+r^2\right]\end{aligned} \tag{5.1}$$

yazılabilir. Diğer yandan L_n operatörünün lineerliğinden ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f(t,r);x,y\right)-f(x,y)\right| &\le \left|L_n\left(f(t,r)-f(x,y);x,y\right)\right|\\ &\quad+\left|f(x,y)\right|\left|L_n(1;x,y)-1\right|\\ &\le \left|L_n\left(f(t,r)-f(x,y);x,y\right)\right|\\ &\quad+M_f\left|L_n(1;x,y)-1\right|\end{aligned} \tag{5.2}$$

elde edilir. L_n operatörünün monotonluğundan

$$\left|L_n\left(f(t,r)-f(x,y);x,y\right)\right| \le L_n\left(\left|f(t,r)-f(x,y)\right|;x,y\right) \tag{5.3}$$

yazılabilir. Eş. 5.1 in Eş. 5.3 de kullanılmasıyla ve lineerlikten

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f(t,r)-f(x,y);x,y\right)\right| &\le \varepsilon+\varepsilon\left(L_n(1;x,y)-1\right)\\ &\quad+\frac{2M_f}{\delta^2}\Big[\left(x^2+y^2\right)\left(L_n(1;x,y)-1\right)\\ &\quad-2x\left(L_n(t;x,y)-x\right)-2y\left(L_n(r;x,y)-y\right)\\ &\quad+\left(L_n\left(t^2+r^2;x,y\right)-\left(x^2+y^2\right)\right)\Big]\end{aligned} \tag{5.4}$$

yazılabilir. Eş. 5.4 ün Eş. 5.2 de kullanılmasıyla ve i,ii,iii ve iv koşullarının kullanılmasıyla

$$\left|L_n\left(f(t,r)-f(x,y);x,y\right)\right| \le \varepsilon$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

5.1 Tanım

İki değişkenli $q-$Bernstein polinomu

$$
\begin{aligned}
B_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2;x,y\right)=&\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q x^{k_1} y^{k_2} \\
&\times \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

şeklindedir [Barbosu, 1999].

5.2 Tanım

$I^2=[0,1]\times[0,1]$, $R^{I^2}=\left\{f\,/\,f:I^2\to R\right\}$, $f\in R^{I^2}$, $0<q_1<1$ ve $0<q_2<1$ olmak üzere

$$
B_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)
\tag{5.6}
$$

ve

$$
B_{n_2}^{x}\left(f;q_2;x,y\right)=\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q x^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}x\right)
\tag{5.7}
$$

şeklindedir.

5.2 Teorem

$B_{n_1}^x$, $B_{n_2}^y$ $C\left(I^2\right)$ üzerinde Eş. 5.6 ve Eş. 5.7 şeklinde tanımlanan operatörler olmak üzere $\forall f \in C\left(I^2\right)$ için $B_{n_1,n_2} : C\left(I^2\right) \to C\left(I^2\right)$ iki değişkenli $q-$Bernstein polinomu için

$$B_{n_1}^x B_{n_2}^y = B_{n_2}^y B_{n_1}^x = B_{n_1,n_2}\left(f\,;q_1,q_2;x,y\right) \tag{5.8}$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
B_{n_1}^x B_{n_2}^y\left(f;q_2;x,y\right) &= B_{n_1}^x\left(B_{n_2}^y\left(f;q_2;x,y\right)\right)\\
&= B_{n_1}^x\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)\\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)B_{n_1}^x\left(f\left(x,\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)\right)\\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\\
&\quad\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q},\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q},\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\\
&\quad\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
B_{n_2}^{y} B_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right) &= B_{n_2}^{y}\left(B_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right)\right)\\
&= B_{n_2}^{y}\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)B_{n_2}^{y}\left(f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\\
&\quad \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2\\ k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2\\ k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\\
&\quad \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

elde edilir. Eş. 5.9 ve Eş. 5.10 ifadeleri denk olduğundan ispat tamamlanır.

5.3 Teorem

$e_{ij}: I^2 \to I^2$, $e_{ij}(x,y) = x^i y^j$, $i,j = 0,1,2$ test fonksiyonları olmak üzere, $\forall (x,y) \in I^2$ için

i. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{00};q_1,q_2;x,y\right) = e_{00}(x,y) \tag{5.11}$$

ii. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2;x,y\right) = e_{10}(x,y) \tag{5.12}$$

iii. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2;x,y\right) = e_{01}(x,y) \tag{5.13}$$

iv. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{11};q_1,q_2;x,y\right) = e_{11}(x,y) \tag{5.14}$$

v. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2;x,y\right) = e_{20}(x,y) + \frac{x(1-x)}{[n_1]_q} \tag{5.15}$$

vi. $$B_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_1,q_2;x,y\right)=e_{02}\left(x,y\right)+\frac{y\left(1-y\right)}{\left[n_2\right]_q} \tag{5.16}$$

eşitlikleri sağlanır [Barbosu, 1999].

İspat

i.

$$\begin{aligned}
B_{n_1,n_2}\left(e_{00};q_1,q_2;x,y\right)&=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\\
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}\\
&=B_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)\\
&=1.1=1=e_{00}\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
B_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2;x,y\right)&=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\\
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}\\
&=B_{n_1}\left(e_1;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)\\
&=x.1=x=e_{10}\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
B_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2;x,y\right)&=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\\
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}\\
&=B_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_1;q_2;y\right)
\end{aligned}$$

$$=1.y=y=e_{01}\left(x,y\right)$$

iv.

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{11};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}\left(e_1;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_1;q_2;y\right)$$

$$=x.y=x.y=e_{11}\left(x,y\right)$$

v.

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}\left(e_2;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)$$

$$=\left(x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n_1\right]_q}\right).1=e_{20}\left(x,y\right)+\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n_1\right]_q}$$

vi.

$$B_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right\}\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right\}$$

$$=B_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)B_{n_2}\left(e_2;q_2;y\right)$$

$$=1.\left(y^2+\frac{y\left(1-y\right)}{\left[n_2\right]_q}\right)=e_{02}\left(x,y\right)+\frac{y\left(1-y\right)}{\left[n_2\right]_q}$$

Böylece ispat tamamlanır.

5.4 Teorem

$\forall f : I^2 \to R$ fonksiyonu için, $\omega\left(f;\delta_1,\delta_2\right)$ iki değişkenli $q-$Bernstein polinomunun süreklilik modülü olmak üzere

$$\left\| B_{n_1,n_2}\left(f\right)-f\right\| \leq \frac{9}{4}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{\left[n_1\right]_q}},\frac{1}{\sqrt{\left[n_2\right]_q}}\right) \tag{5.17}$$

dir [Barbosu, 1999].

İspat

$\forall f \in R^{I^2}$, $f : I^2 \to R$ ve $\left(\delta_1,\delta_2\right)\in R_+^2$ için $\omega\left(\delta_1,\delta_2\right)$ süreklilik modülü

$$\begin{aligned}\omega\left(\delta_1,\delta_2\right) = sup\Big\{&\left|f\left(x,y\right)-f\left(x',y'\right)\right| \left(x,y\right)\in I^2,\left(x',y'\right)\in I^2,\\ &\left|x-x'\right|<\delta_1,\left|y-y'\right|<\delta_2\Big\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

şeklindedir. Burada süreklilik modülü monoton artan fonksiyondur. Yani

$$\left(\delta_1,\delta_2\right)\in R_+^2 \ , \ \left(\delta_1',\delta_2'\right)\in R_+^2 \ , \ \delta_1<\delta_1' \text{ ve } \delta_2<\delta_2' \text{ ise } \omega\left(\delta_1,\delta_2\right)\leq\omega\left(\delta_1',\delta_2'\right) \tag{5.19}$$

dir. Şimdi teoremin ispatına dönelim. Teorem 5.3 den

$$\begin{aligned}\left|B_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| = &\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} n_2\\ k_2\end{bmatrix}_q x^{k_1}y^{k_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\\ &\times\left(f\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q},\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)-f\left(x,y\right)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q x^{k_1} y^{k_2} \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$
$$\times\left| f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)-f\left(x,y\right)\right| \tag{5.20}$$

yazılabilir. Süreklilik modülünün monotonluğundan

$$\left| f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq \omega\left(\left|\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-x\right|,\left|\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-y\right|\right)$$
$$\leq \left(\left|\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-x\right|\sqrt{[n_1]_q}+1\right)\left(\left|\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-y\right|\sqrt{[n_2]_q}+1\right)$$
$$\times\omega\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]_q}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_q}}\right) \tag{5.21}$$

yazılabilir. Eş. 5.21 , Eş. 5.20 de yerine yazılır ve

$$\left|B_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq K$$

denilirse

$$K=\omega\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]_q}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_q}}\right)\left(\sqrt{[n_1]_q}\sum_{k_1=0}^{n_1}\left|\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-1\right|\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)+1\right)$$
$$\times\left(\sqrt{[n_2]_q}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left|\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-1\right|\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)+1\right) \tag{5.22}$$

dir. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanırsak

$$\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-x\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^2=\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left|\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-x\right|\left(\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}-x\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$\times\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q x^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$=\left\{B_{n_1}\left(e_2;q_1;x\right)-2xB_{n_1}\left(e_1;q_1;x\right)\right.$$

$$\left.+x^2B_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)\right\}B_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]_q}-2x^2+x^2$$

$$=\frac{x(1-x)}{[n_1]_q}\leq\frac{1}{4[n_1]_q}$$

(5.23)

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left(\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-y\right)\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)^2=\left(\sum_{k_2=0}^{n_2}\left|\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-y\right|\left(\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\times\left(\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}-y\right)^2\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)$$

$$\times\left(\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q y^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)$$

$$=\left\{B_{n_2}\left(e_2;q_2;y\right)-2xB_{n_2}\left(e_1;q_2;y\right)\right.$$

$$\left.+y^2B_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)\right\}B_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)$$

$$=y^2+\frac{y(1-y)}{[n_2]_q}-2y^2+y^2$$

$$=\frac{y(1-y)}{[n_2]_q}\leq\frac{1}{4[n_2]_q} \tag{5.24}$$

elde edilir. Eş. 5.23 ve Eş. 5.24 değerleri Eş. 5.22 de K da yerine yazılırsa

$$\left|B_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq\omega\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]_q}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_q}}\right)\left(\sqrt{[n_1]_q}\frac{1}{2\sqrt{[n_1]_q}}+1\right)$$

$$\times\left(\sqrt{[n_2]_q}\frac{1}{2\sqrt{[n_2]_q}}+1\right)$$

$$=\frac{9}{4}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]_q}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_q}}\right) \tag{5.25}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

6. İKİ DEĞİŞKENLİ KING TİPLİ $q-$ BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde iki değişkenli King tipli $q-$ Bernstein polinomlarının tanımını verdikten sonra Volkov teoremi yardımıyla yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz..

6.1 Tanım

$I^2=[0,1]\times[0,1]$, $R^{I^2}=\{f\,/\,f:I^2\to R\}$, $f\in R^{I^2}$, $0\le r_{n_1}(x)\le 1$, $0\le r_{n_2}(y)\le 1$, $0<q_1<1$ ve $0<q_2<1$ olmak üzere

$$V_{n_1}^x(f;q_1;x,y)=\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\begin{bmatrix} n_1\\ k_1\end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right) \tag{6.1}$$

şeklindedir. Burada

i. $V_{n_1}^x(1;q_1;x,y)=1$

ii. $V_{n_1}^x(t;q_1;x,y)=r_{n_1}(x)$

iii. $V_{n_1}^x(t^2;q_1;x,y)=x^2$

dir. Benzer şekilde

$$V_{n_2}^y(f;q_2;x,y)=\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2\\ k_2\end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right) \tag{6.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

i. $V_{n_2}^y(1;q_2;x,y)=1$

ii. $\quad V_{n_2}^{y}\left(t;q_2;x,y\right)=r_{n_2}\left(y\right)$

iii. $\quad V_{n_2}^{y}\left(t^2;q_2;x,y\right)=y^2$

dir. Bu eşitliklerde

$r_{n_1}\left(x\right)=x+\dfrac{x}{2\left[n_1\right]_q}-\dfrac{1}{2\left[n_1\right]_q}$ ve $r_{n_2}\left(y\right)=y+\dfrac{y}{2\left[n_2\right]_q}-\dfrac{1}{2\left[n_2\right]_q}$ şeklindedir.

6.2 Tanım

$V_{n_1,n_2}:C\left(I^2\right)\rightarrow C\left(I^2\right)$ iki değişkenli King tipli $q-$Bernstein polinomu

$$V_{n_1,n_2}\left(f;q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}f\left(\frac{\left[k_1\right]_q}{\left[n_1\right]_q},\frac{\left[k_2\right]_q}{\left[n_2\right]_q}\right)\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}\left(x\right)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}\left(y\right)\right)^{k_2}$$
$$\times\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}\left(x\right)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}\left(y\right)\right) \tag{6.3}$$

şeklinde tanımlanır.

6.1 Teorem

$V_{n_1}^{x}$, $V_{n_2}^{y}$ $C\left(I^2\right)$ üzerinde tanımlı operatörler olmak üzere $\forall f\in C\left(I^2\right)$ için

$$V_{n_1}^{x}V_{n_2}^{y}\left(f;q_2;x,y\right)=V_{n_2}^{y}V_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right) \tag{6.4}$$

dir

İspat.

$$
\begin{aligned}
V_{n_1}^{x}V_{n_2}^{y}\left(f;q_2;x,y\right) &= V_{n_1}^{x}\left(V_{n_2}^{y}\left(f;q_2;x,y\right)\right)\\
&= V_{n_1}^{x}\left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right)\\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)V_{n_1}^{x}\left(f\left(x,\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\right)\\
&= \sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\\
&\quad \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\\
&\quad \prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
V_{n_2}^{y}V_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right) &= V_{n_2}^{y}\left(V_{n_1}^{x}\left(f;q_1;x,y\right)\right)\\
&= V_{n_2}^{y}\left(\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)V_{n_2}^{y}\left(f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},y\right)\right)\\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\\
&\quad \left(\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q},\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}, \frac{[k_2]_q}{[n_2]_q} \right) \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x) \right)^{k_1} \left(r_{n_2}(y) \right)^{k_2}$$

$$\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x) \right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y) \right) \tag{6.6}$$

elde edilir. Eş. 6.5 ve Eş. 6.6 ifadeleri denk olduğundan ispat tamamlanır.

6.2 Teorem

$e_{ij} : I^2 \to I^2$, $e_{ij}(x,y) = x^i y^j$, $i, j = 0,1,2$ test fonksiyonları olmak üzere, $\forall (x,y) \in I^2$ için

i. $$V_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y) = e_{00}(x,y) \tag{6.7}$$

ii. $$V_{n_1,n_2}(e_{10}; q_1, q_2; x, y) = r_{n_1}(x) \tag{6.8}$$

iii. $$V_{n_1,n_2}(e_{01}; q_1, q_2; x, y) = r_{n_2}(y) \tag{6.9}$$

iv. $$V_{n_1,n_2}(e_{11}; q_1, q_2; x, y) = \left(r_{n_1}(x) \right)\left(r_{n_2}(y) \right) \tag{6.10}$$

v. $$V_{n_1,n_2}(e_{20}; q_1, q_2; x, y) = e_{20}(x,y) = x^2 \tag{6.11}$$

vi. $$V_{n_1,n_2}(e_{02}; q_1, q_2; x, y) = e_{02}(x,y) = y^2 \tag{6.12}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

i.

$$V_{n_1,n_2}(e_{00}; q_1, q_2; x, y) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x) \right)^{k_1} \left(r_{n_2}(y) \right)^{k_2}$$

$$\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} r_{n_1}(x) \right) \prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} r_{n_2}(y) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\} \\
&\quad\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\} \\
&=V_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right) \\
&=1.1=1=e_{00}\left(x,y\right)
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
V_{n_1,n_2}\left(e_{10};q_1,q_2;x,y\right)&=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \\
&\quad\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right) \\
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\} \\
&\quad\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\} \\
&=V_{n_1}\left(e_1;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right) \\
&=r_{n_1}(x).1=r_{n_1}(x)
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
V_{n_1,n_2}\left(e_{01};q_1,q_2;x,y\right)&=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2} \\
&\quad\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right) \\
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\} \\
&\quad\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\} \\
&=V_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_1;q_2;y\right) \\
&=1.r_{n_2}(y)=r_{n_2}(y)
\end{aligned}
$$

iv.

$$V_{n_1,n_2}\left(e_{11};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$
$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$
$$\times\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$
$$=V_{n_1}\left(e_1;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_1;q_2;y\right)$$
$$=\left(r_{n_1}(x)\right)\left(r_{n_2}(y)\right)$$

v.

$$V_{n_1,n_2}\left(e_{20};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}xr_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$
$$=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\left(\frac{[k_1]_q}{[n_1]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\}$$
$$\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\}$$
$$=V_{n_1}\left(e_2;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_0;q_2;y\right)$$
$$=\left(x^2\right).1=e_{20}\left(x,y\right)$$

vi.

$$V_{n_1,n_2}\left(e_{02};q_1,q_2;x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_q\left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}$$
$$\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&=\left\{\sum_{k_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_1}(x)\right)^{k_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-k_1-1}\left(1-q_1^{s_1}r_{n_1}(x)\right)\right\} \\
&\quad\left\{\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_q}{[n_2]_q}\right)^2\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_q \left(r_{n_2}(y)\right)^{k_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-k_2-1}\left(1-q_2^{s_2}r_{n_2}(y)\right)\right\} \\
&=V_{n_1}\left(e_0;q_1;x\right)V_{n_2}\left(e_2;q_2;y\right) \\
&=1.\left(y^2\right)=e_{02}\left(x,y\right)
\end{aligned}
$$

Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Agratini, O., “On A Class Of Linear Positive Bivariate Operators of King Type”, ***Studıa Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica***, LI(4): 13-21 (2006).

Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-type Approximation Theory and its Applications”, ***Walter de Gruyter Berlin***, New York, 141-180 (1994).

Andrews, G.E., Askey, R. , Roy, R., “Special Functions”, ***Cambridge University Pres***, 481-485 (1999).

Barbosu, D., “Some Generalized Bivariate Bernstein Operators”, ***Mathematical Notes***, Miskolc, 1(1): 3-10 (2000).

Bleimann, G., Butzer, P.L. , Hahn, L., “A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis.”, ***Math. Proc***., A, 83: 255-262 (1980).

Cheney, E.W. , Sharma, A., “Bernstein power series”, ***Canad. J. Math.***, 16: 241-252 (1964).

Doğru, O. , Gupta, V., “Korovkin-type approximation properties of bivariate q-Meyer-König and Zeller operators”, ***Calcolo,*** 43: 51-63 (2006).

Doğru, O. , Örkcü, M., “King type modification of Meyer-König and Zeller operators based on the q-integers”, ***Mathematical and Computer Modelling,*** 50: 1245-1251 (2009).

King, J.P., “Positive Linear Operators Which Preserve x^2”, ***Acta Math. Hungar***, 99 (3): 203-208 (2003).

Korovkin, P.P., “Lineer operators and approximation theory”, ***Hindustan Publ. Co.***, Delhi, 20-110 (1960).

Lorentz, G.G., “Bernstein polynomials”, ***University of Toronto Press***, Mathematical Expositions, 10-130 (1953).

Philips, G.M., “On generalized Bernstein polynomials”, ***D.F. Griffits, G.A. Watson Eds.***, 263-269 (1996).

Volkov, V.I., “On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables”, ***Russian Dokl. Akad. Nauk.,*** SSSR (N.S.) 115: 17-19 (1957)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ALTIN , Hüseyin Erhan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 30.07.1986 , Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 555 876 3110
e-mail	: fenerhan_86@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2010
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008
Lise	Dr. Binnaz Rıdvan Ege Anadolu Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, Tenis, Bilgisayar