BAZI İNTEGRAL TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN $q-$GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Mediha ÖRKCÜ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2011
ANKARA

Mediha ÖRKCÜ tarafından hazırlanan "BAZI İNTEGRAL TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN $q-$GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Oktay DUMAN ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, TOBB ETÜ

Doç. Dr. Nuri ÖZALP ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 27/05/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mediha ÖRKCÜ

BAZI İNTEGRAL TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİNİN q – GENELLEŞMELERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Doktora Tezi)

Mediha ÖRKCÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2011

ÖZET

Korovkin tipli yaklaşım teoremleri yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla Korovkin tipli yaklaşım teoremleri geliştirilmiştir [Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark. 2003]. Bu teoremler kullanılarak birçok lineer pozitif operatörün q – genelleşmelerinin veya integral tipli genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri araştırılabilmiştir. Bu tezde ise, Aral ve Gupta (2006) tarafından tanımlanan q – Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi verilmiş ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Yaklaşım teorisinde operatörlerin düzgün yakınsaklığının araştırılması kadar bu yakınsamanın hızının değerlendirilmesi de oldukça önemli bir konudur. Bu tezde, ilk olarak oluşturulan operatörler dizisi için Voronovskaja tipli teorem bu yüzden verilmiştir. Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel yaklaşım hızı elde edebilmek için q – Szasz-Mirakjan operatörlerinin yeni bir Kantorovich tipli genelleşmesi oluşturulmuştur. Ayrıca pozitif bir operatör olan Riemann tipli q – integral yardımıyla q – Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörleri geliştirilip ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım oranı elde edilmiştir. Bunun yanında Riemann tipli q – integral yardımıyla oluşturulan operatörlerin iki değişkenli genelleşmesinin istatistiksel yaklaşım özellikleri de verilmiştir. Yukarıda sözü

edilen operatörlerin $q=1$ olması durumunda klasik operatörlerin integral tipli genelleşmelerine dönüşmesi ve q yerine (q_n) dizisi alınarak bu dizinin seçimine göre yaklaşım hızının uygun şekilde ayarlanabilir olması tezin önemini artırmaktadır.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Korovkin tipli teoremler, Szasz-Mirakjan operatörler, $q-$ genelleşmeler, Kantorovich tipli operatörler, İstatistiksel yakınsaklık.
Sayfa Adedi : 75
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Ogün DOĞRU

THE APPROXIMATION PROPERTIES OF $q-$GENERALIZATIONS OF SOME LINEAR POSITIVE OPERATOR SEQUENCES

(Phd. Thesis)

Mediha ÖRKCÜ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

May 2011

ABSTRACT

Korovkin type approximation theorems have fundamental role in the approximation theory. By the aid of the concept of statistical approximation, Korovkin type theorems are developed [Gadjiev and Orhan, 2002; Duman et all, 2003]. Using these theorems, the approximation properties of the $q-$generalizations and integral-type generalizations of many linear positive operators can be investigated. In this thesis, Kantorovich-type generalization of $q-$Szasz-Mirakjan operators defined by Aral and Gupta (2006) is given and statistical approximation properties of this generalization are investigated. In the approximation theory, evaluation of approximation rate is as important subject as an investigation of uniform convergence of operators. Hence, Voronovskaja type theorem is given for constructed operators' sequence in this thesis. Then, a new Kantorovich type generalization of the $q-$Szasz-Mirakjan operators is defined to obtain statistical approximation rate by means of modulus of continuity. Furthermore, $q-$Szasz-Mirakjan-Kantorovich operators are developed with the aid of Riemann type $q-$integral and the approximation rate is obtained by the weighted modulus of continuity. Also, statistical approximation properties of two variable generalizations of operators constructed by the Riemann type $q-$integral are given. In the case of $q=1$, since our operators are reduced to the integral type generalization of the

classical operators, and since the approximation rate can properly be calibrated by a proper choose of (q_n) instead of q, increase the importance of this thesis.

Science Code : **204.1.138**
Keywords : **Korovkin type theorems, Szasz-Mirakjan operators $q-$generalizations, Kantorovich type operators, Statistical approximation.**
Page Number : **75**
Adviser : **Assoc. Prof. Dr. Ogün DOĞRU**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren saygıdeğer hocam, Sayın Doç. Dr. Ogün DOĞRU'ya teşekkürlerimi bildirmeyi bir borç bilirim. Ayrıca doktora öğrenciliğim sürecinde burs aldığım TÜBİTAK'a teşekkürlerimi, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşime, anneme ve babama en içten saygı ve sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\lvert K \rvert$	K kümesinin eleman sayısı
δ	Yoğunluk fonksiyonu
$T_n(f;x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatörler dizisi
e_m	$e_m(x) = x^m,\ m \geq 0$
ψ_x^k	$\psi_x^k(t) = (t-x)^k$ k -yıncı merkezi moment
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$\lVert f \rVert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında $\lVert f \rVert_{C[a,b]} = \underset{x\in[a,b]}{maks} \lvert f(x) \rvert$ ile tanımlı norm
$\rho(x)$	$\rho(x) \geq 1$ $\mathbb{R}^m$ de sürekli fonksiyon ve $\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} \rho(x) = \infty$
$B_\rho(\mathbb{R}^m)$	$\mathbb{R}^m$ de $\lvert f(x) \rvert \leq M_f \rho(x)$ eşitsizliğini gerçekleyen fonksiyonların uzayı
$C_\rho(\mathbb{R}^m)$	$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ deki tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$\lVert f \rVert_\rho$	$B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayında $\lVert f \rVert_\rho = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m} \dfrac{\lvert f(x) \rvert}{\rho(x)}$ ile tanımlı norm
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega_\alpha(f,\delta)$	Ağırlıklı süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Analiz ve fonksiyonlar teorisinde yer alan araştırma alanlarından biri de lineer pozitif operatörlerle yaklaşım konusudur ve matematiğin birçok dalıyla ilişkilidir.

Alman matematikçi Weierstrass (1885) sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus matematikçi Bernstein varlığı bilinen bu polinomun, $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

Bohman (1952) ve Korovkin (1953) lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımına ilişkin çok önemli teoremler vermişlerdir. Korovkin'in kendi adıyla anılan teorem bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

1.1. Teorem (Korovkin, 1953)

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende sınırlı olsun. Eğer T_n lineer pozitif operatörler dizisi

i) $\lim_{n\to\infty} \|T_n(1) - 1\|_{C[a,b]} = 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} \|T_n(t) - x\|_{C[a,b]} = 0$

iii) $\lim_{n\to\infty} \|T_n(t^2) - x^2\|_{C[a,b]} = 0$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında $\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$ dır.

Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenebilen birçok lineer pozitif operatörler (Meyer-König-Zeller operatörleri, Szasz-Mirakjan operatörleri, Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri gibi) tanımlanmıştır.

Operatörler tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genelleşmeleri de ele alınmıştır. Durrmeyer tipli ve Kantorovich tipli genelleşmeler olarak bilinen integral tipli genelleşmeler oldukça önem kazanmıştır [Kantorovich, 1930; Durrmeyer, 1967; Derriennic, 1981]. Örneğin, 1950 yılında Szasz tarafından tanımlanan

$$S_n\left(f;x\right)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\left(nx\right)^k}{k!}, \quad x\in\left[0,\infty\right)$$

Szasz operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi ise, Totik (1983) tarafından $x\in\left[0,\infty\right)$ için

$$K_n\left(f;x\right)=ne^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{k!}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(t\right)dt\,,$$

olarak tanımlanmıştır.

Lineer pozitif operatörlerin diğer bir genelleşmesi de $q-$teori ile ilgilidir. Yaklaşımlar teorisinde $q-$genelleşme kavramı ilk kez Lupaş (1987) tarafından Bernstein polinomlarına uygulanmış ve Ostrovska (2006), bu operatörlerin düzgün yakınsaklığını incelemiştir. Phillips (1997) üzerinde daha sıklıkla çalışılan $q-$Bernstein polinomlarını tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Ayrıca $q-$Bernstein polinomları ile ilgili Oruç ve Tuncer (2002), Ostrovska (2003) ve Phillips (2000)'in çalışmaları da vardır.

Daha sonra $q-$genelleşme kavramı ile birçok operatörün $q-$genelleşmesi verilmiştir. Bunlara örnek olarak Meyer-König-Zeller operatörlerinin $q-$genelleşmesi Trif (2000) tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İkinci momentlerinin açıkça elde edilmesi için Doğru ve Duman (2006), $q-$Meyer-König-Zeller operatörlerinin yeni bir genelleşmesini yapmışlardır. Aral ve Gupta (2006), Szasz-Mirakjan operatörlerinin $q-$genelleşmesini yaparak yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Agratini ve Doğru (2010) ise $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin modifikasyonunun ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özelliklerini elde etmişlerdir.

Derriennic tarafından Bernstein polinomlarının diğer bir integral tipli genelleşmesi olan Durrmeyer tipli genelleşmenin $q-$Bernstein polinomlarına genişletilmesi yine Derriennic tarafından yapılmıştır [Derriennic, 2004]. Gupta (2007), $q-$Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Diğer taraftan Kantorovich tarafından verilen Bernstein polinomlarının integral tipli genelleşmesinin $q-$Bernstein polinomlarına genişletilmesi Radu (2008) tarafından yapılmış ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İspir (2001) ağırlıklı uzayda Baskakov operatörlerinin yaklaşım özellerini incelemiştir. Gupta ve Radu (2009) ise $q-$Baskakov-Kantorovich operatörlerini tanımlamışlar ve bu operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Dalmanoğlu ve Doğru (2010), $q-$Meyer-König-Zeller operatörleri için Kantorovich tipli genelleşme vermişlerdir. Szasz-Mirakjan, Szasz-Mirakjan-Kantorovich, Szasz-Schurer ve Szasz-Schurer-Kantorovich operatörlerinin $q-$genelleşmeleri Mahmudov (2010) tarafından ayrıca incelenmiştir.

Bu tezde, Aral ve Gupta (2006) tarafından tanımlanmış olan $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi verilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu Riemann tipli $q-$integral yardımıyla geliştirilmiş ve oluşturulan operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri verilmiştir. Yukarıda sözü edilen operatörlerin $q=1$ olması durumunda klasik operatörlerin integral tipli genelleşmelerine dönüşmesi ve q yerine (q_n) dizisi alınarak bu dizinin seçimine göre yaklaşım hızının amaca uygun şekilde ayarlanabilir olması tezin önemini artırmaktadır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde ihtiyaç duyulan temel teoremlerden ve tanımlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu tanımlanmış ve ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca oluşturan operatörler için Voronovskaja tipli teorem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin yeni bir $q-$genelleşmesi tanımlanmış ve $q-$integral için bir lemma verilerek oluşturulan operatörlerin noktasal yaklaşım oranı süreklilik modülü ile elde edilmiştir. Bunun yanında yeni oluşturulan operatörlerinin bazı test fonksiyonlarını koruyan iki farklı modifikasyonu tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde ise $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu Riemann tipli $q-$integral yardımıyla geliştirilmiş ve bu operatörlerin ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca Riemann tipli $q-$integral ile tanımlanan operatörlerin iki değişkenli genelleşmesi oluşturulup istatistiksel yaklaşım özellikleri de elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde ihtiyaç duyulan temel teoremlere ve tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y reel değerli iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y de bir Tf fonksiyonu karşılık getiren T kuralına operatör denir ve Tf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer için $T(f;x)$ gösterimi kullanılır.

Her $f,g\in X$ ve her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$T(\alpha f+\beta g)=\alpha T(f)+\beta T(g)$$

koşulu sağlanıyor ise T operatörüne lineer operatör denir.

T operatörü pozitif bir f fonksiyonunu pozitif bir Tf fonksiyonuna dönüştürüyorsa; yani D_f, $D_{T(f)}$ sırası ile f ve $T(f)$ nin tanım kümeleri ve $\forall t\in D_f$ için $f(t)\geq 0$ iken $\forall x\in D_{T(f)}$ için $T(f;x)\geq 0$ sağlanıyorsa ise T operatörüne pozitiftir denir.

Lineer pozitif operatörler monotondur.

$A\subset\mathbb{R}$ olmak üzere (f_n) A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon dizisi olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı ve her bir $x\in A$ noktasına karşılık öyle bir $n_0=n_0(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}$ var ise öyle ki $\forall n>n_0$ olduğunda $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak denir.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa öyle ki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

$(X, \| \ \|)$ bir fonksiyon uzayı ve $(f_n) \subset X$ ve $f \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa öyle ki $\forall n > n_0$ için $\| f_n - f \|_X < \varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi X deki norma göre f fonksiyonuna yakınsaktır denir.

$(f_n) \subset C[a,b]$ dizisinin $C[a,b]$ deki

$$\| f \|_{C[a,b]} = \underset{x \in [a,b]}{maks} |f(x)|$$

normuna göre f fonksiyonuna yakınsaklığı, f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığına denktir.

Sonsuz bölgelerde sürekli ve polinomsal büyüyen fonksiyon uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır [bkz. Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995].

$\rho(x) \geq 1$ tüm $\mathbb{R}^m$ uzayında sürekli bir fonksiyon ve $\lim_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^m$ uzayında $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ eşitsizliğini gerçekleyen fonksiyonlar kümesi $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ile, $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonlar kümesi de $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ ile gösterilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı sabit bir sayıdır.

$$\| f \|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

normu ile $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ve $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ lineer normlu uzaylardır. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, C_ρ, B_ρ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir. Özel durumda $\varphi(x)$ tüm reel eksende monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $m=1$ olması halinde $\rho(x)=1+\varphi^2(x)$ şeklinde göz önüne alınabilir.

$$C_\rho^k = \left\{ f \in C_\rho \ : \ \lim_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$$

C_ρ uzayının bir alt uzayıdır. Özel olarak $k_f=0$ olduğunda C_ρ^0 alt uzayı elde edilir ki bu uzayın elemanları için $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} = 0$ olur.

Teorem 1.1 (Korovkin Teoremi) lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli fonksiyona yaklaşımıyla ilişkilidir. Yani basit fonksiyonlar üzerinde operatörler dizisi düzgün yakınsak ise uzayın keyfi fonksiyonu içinde aynı norma göre yakınsaklık sağlanır. Gadjiev (1974) tarafından sınırsız bölgelerde tanımlanmış operatör dizileri için böyle bir teoremin geçerli olmadığı ispatlanmıştır ve $\rho-$normlu uzaylarda yakınsaklık teoreminin nasıl verilmesi gerektiği gösterilmiştir. [bkz. Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995]

2.1. Teorem (Gadjiev, 1974)

Keyfi $m \geq 1$ için öyle (T_n) lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir öyle ki, $\rho(x)=1+|x|^2$ $\left(|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2}\right)$ için $C_\rho(\mathbb{R}^m)$ den $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ ye dönüşümü için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(1)-1\|_\rho = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(t_j\right)-x_j\right\|_\rho=0;\ j=1,2,...,m$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(|t|^2\right)-|x|^2\right\|_\rho=0$$

şeklinde $(m+2)$ şartları sağlansın. Bu durumda $C_\rho\left(\mathbb{R}^m\right)$ uzayında öyle bir f^* fonksiyonu bulunabilir ki $n\to\infty$ için

$$\left\|T_n\left(f^*\right)-f^*\right\|_\rho\geq 1$$

olur.

2.2. Teorem (Gadjiev, 1974)

$\rho_1(x)$ ve $\rho_2(x)$ sürekli ve 1'den küçük olmayan keyfi fonksiyonlar $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}=0$ koşulunu sağlasın. T_n'in $C_{\rho_1}\left(\mathbb{R}^m\right)$'den $B_{\rho_2}\left(\mathbb{R}^m\right)$'ye tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olduğu varsayılsın. Keyfi $f\in C_{\rho_1}\left(\mathbb{R}^m\right)$ fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n(f)-f\right\|_{\rho_2}=0$$

olması için gerek ve yeter şart $x\in\mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$F_0=\frac{1}{1+|x|^2}\rho_1(x)$$

$$F_j = \frac{x_j}{1+|x|^2}\rho_1(x);\; j=1,2,...,m$$

$$F_{m+1} = \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\rho_1(x)$$

fonksiyonları için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(F_j\right)-F_j\right\|_{\rho_1}=0;\; j=0,1,2,...,m,m+1$$

$(m+2)$ şartın sağlanmasıdır.

2.2. $q-$ Analiz

$q-$analiz birçok konunun (hipergeometrik seriler, kompleks analiz, parçacık fiziği gibi…) genelleşmesidir. Matematiğin birçok farklı alanında; sayılar teorisi, ortogonal polinomlar, kombinatorik gibi, diğer alanlarda ise görecelik teorisinde, mekanikte uygulama alanı bulmuştur.

Jackson, $q-$analizin en önemli isimlerinden biridir. XX. yy başlarında $q-$türev ve $q-$integral tanımlarıyla, $q-$analizin sistematik şekilde ilerlemesine önderlik etmiştir. Son yıllarda klasik analizde bilinen birçok tanım ve teoremin $q-$genelleşmeleri üzerine çalışılmaktadır [Gauchman 2004, Marinkovich ve ark. 2002, 2008].

$q-$analizin temel ifadeleri, Kac ve Cheung'un (2002) Quantum Calculus adlı kitabında, detaylar ise Andrews ve Askey'in (1999) Special Functions adlı kitabında yer almaktadır.

$q>0$ olmak üzere, negatif olmayan r tamsayısı için,

$$[r]_q=\begin{cases}\dfrac{1-q^r}{1-q} & , \ q\neq 1\\ r & , \ q=1\end{cases}$$

ifadesine r 'nin $q-$ tamsayısı denir.

$q>0$ olmak üzere, $r\in\mathbb{N}$ için r nin $q-$ tamsayısı,

$$[r]_q=\begin{cases}1+q+...+q^{r-1} & , \ q\neq 1\\ r & , \ q=1\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$q>0$ olmak üzere, $r\in\mathbb{N}$

$$[r]_q!=\begin{cases}[1]_q[2]_q\ldots[r]_q, & r=1,2,\ \ldots\\ 1 & , \ r=0.\end{cases}$$

ifadesine r 'nin $q-$ faktöriyeli ve $n\geq r\geq 0$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}_q=\frac{[n]_q!}{[n-r]_q![r]_q!}$$

ifadesine de $q-$ binom katsayısı denir. $q=1$ durumunda klasik binom katsayısını verir.

$q\in(0,1)\cup(1,\infty)$ olmak üzere, $q-$ diferensiyel operatörü

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x},\ x \neq 0;\ \ D_q f(0) = \lim_{x \to 0} D_q f(x)$$

ile tanımlıdır. Bu tanımdan

$$D_q x^n = [n]_q\, x^{n-1} \tag{2.1}$$

olduğu açıkça görülür.

Tanımdan hareketle iki fonksiyonun çarpımının $q-$diferensiyeli de

$$D_q\left(u(x)v(x)\right) = D_q\left(u(x)\right)v(x) + u(qx)D_q\left(v(x)\right)$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$n \geq 1$ için $(x-a)_q^n = (x-a)(x-qa)...\left(x-q^{n-1}a\right)$ olmak üzere

$$D_q\left((x-a)_q^n\right) = [n](x-a)_q^{n-1} \tag{2.2}$$

olduğu açıkça görülür.

f 'nin $[0,b]$ aralığında $q-$integrali

$$\int_0^b f(t)d_qt = (1-q)\ b\sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j b\right)q^j\ ,\ 0 < q < 1$$

olarak tanımlanmıştır [Jackson, 1910].

$[0,b]$ aralığında f fonksiyonu Riemann integrallenebilir ise

$$\int_0^b f(t)\,dt = \lim_{q\to 1^-}\int_0^b f(t)\,d_q t$$

dir.

$[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun $q-$integrali,

$$\int_a^b f(t)\,d_q t = \int_0^b f(t)\,d_q t - \int_0^a f(t)\,d_q t$$

$$= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\left(bf\left(q^j b\right) - af\left(q^j a\right)\right)q^j$$

ile tanımlanır.

f 'nin $[a,b]$ aralığında Riemann tipli $q-$integrali

$$\int_a^b f(t)\,d_q^R t = (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} f\left(a+(b-a)q^j\right)q^j,\ 0<q<1$$

olarak tanımlanmıştır [Stankovich ve ark., 2006]. Riemann tipli $q-$integral lineer ve pozitif bir operatördür. Bu integral Hölder eşitsizliğini sağlar. Yani:

$$\alpha,\beta>1 \text{ ve } \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \text{ için } \int_a^b \left|f(t)\,g(t)\right| d_q^R t \le \left(\int_a^b \left|f(t)\right|^{\alpha} d_q^R t\right)^{1/\alpha}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^{\beta} d_q^R t\right)^{1/\beta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. $q-$SZASZ-MIRAKJAN OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ MODİFİKASYONUNUN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bernstein operatörlerinin farklı iki $q-$genelleşmesi Lupaş (1987) ve Phillips (1996) tarafından verilmiştir. Bu çalışmalardan sonra $q-$parametrik operatörler üzerinde çok yoğun çalışmalar yapılmıştır. Aral ve Gupta (2006) her pozitif tamsayı n için, Szasz-Mirakjan operatörlerinin $q-$tipli genelleşmesini

$$S_n^q\left(f;x\right)=E_q\left(-\left[n\right]_q\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{\left[k\right]_q b_n}{\left[n\right]_q}\right)\frac{\left(\left[n\right]_q x\right)^k}{\left[n\right]_q!\left(b_n\right)^k}, \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada, $f\in C\left[0,\infty\right)$, $0\leq x<\dfrac{b_n}{1-q^n}$, b_n ise $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ olacak şekilde bir pozitif sayı dizisi ve $E_q\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{n(n-1)/2}\dfrac{x^n}{\left[n\right]_q!}$ dir.

Bu bölümde Eş. 3.1 ile verilen $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli bir modifikasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Her pozitif tamsayı n ve $q\in\left(0,1\right)$ için,

$$K_n^*\left(f;q;x\right)=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}q^{-k}\frac{\left(\left[n\right]_q x\right)^k}{\left[k\right]_q!\left(b_n\right)^k}\int_{[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}f\left(b_n t\right)d_q t, \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, f, $\left[0,\infty\right)$ aralığında sürekli ve azalmayan fonksiyondur. Ayrıca $0\leq x<\dfrac{b_n}{1-q^n}$, b_n ise $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ olacak şekilde bir pozitif sayı dizisidir ve $E_q\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{n(n-1)/2}\dfrac{x^n}{\left[n\right]_q!}$ dir.

$K_n^*\left(f;q;x\right)$ operatörlerinin tanımdan lineer ve pozitif olduğu görülmektedir.

$K_n^*\left(f;q;x\right)$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini inceleyebilmek için gerekli olan lemma aşağıda verilmiştir.

3.1. Lemma (Örkcü ve Doğru, 2011)

$n \in \mathbb{N}$ olsun. $e_i\left(x\right) = x^i$, $i = 0,1,2$ olmak üzere

$$K_n^*\left(e_0;q;x\right) = 1, \tag{3.3}$$

$$K_n^*\left(e_1;q;x\right) = x + \frac{1}{\left[2\right]_q}\frac{b_n}{\left[n\right]_q}, \tag{3.4}$$

$$K_n^*\left(e_2;q;x\right) = qx^2 + \frac{\left[2\right]_q + \left[2\right]_q^2}{\left[3\right]_q}\frac{b_n}{\left[n\right]_q}x + \frac{1}{\left[3\right]_q}\frac{b_n^2}{\left[n\right]_q^2}, \tag{3.5}$$

sağlanır.

İspat

$q-$tamsayının tanımından dolayı

$$\left[k+1\right]_q - \left[k\right]_q = q^k \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q},\ 0 < q < 1 \tag{3.7}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Eş. 3.6, Eş. 3.7 ve $q-$ integral tanımından dolayı

$$\int_{[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t = \int_0^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t - \int_0^{[k]_q/[n]_q} d_q t$$

$$= (1-q)\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\sum_{j=0}^{\infty} q^j - (1-q)\frac{[k]_q}{[n]_q}\sum_{j=0}^{\infty} q^j$$

$$= \frac{q^k}{[n]_q}$$

yazılabilir.

Buradan, $K_n^*(e_0;q;x)=1$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\int_{[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} b_n t d_q t = (1-q)b_n\frac{[k+1]_q}{[n]_q}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k+1]_q}{[n]_q} - (1-q)b_n\frac{[k]_q}{[n]_q}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k]_q}{[n]_q}$$

$$= \frac{q^k}{1+q}\frac{b_n}{[n]_q^2}\left([k]_q(1+q)+1\right)$$

olduğundan

$$K_n^*(e_1;q;x) = [n]_q E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty} q^{-k}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!(b_n)^k}\left\{\frac{q^k}{[2]_q}\frac{b_n}{[n]_q^2}\left([k]_q[2]_q+1\right)\right\}$$

$$= E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!(b_n)^k}$$

$$+ E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!(b_n)^k}\frac{1}{[2]_q}\frac{b_n}{[n]_q}$$

$$= x + \frac{1}{[2]_q}\frac{b_n}{[n]_q}$$

elde edilir. Son olarak $q-$ integral için benzer işlemler yapılarak

$$\int_{[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} b_n^2 t^2 d_q t = \frac{b_n^2}{[n]_q^3}\frac{q^k}{1+q+q^2}\left([k+1]_q^2+[k]_q[k+1]_q+[k]_q^2\right)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadeden ve Eş. 3.6, Eş. 3.7 den yararlanarak da,

$$\begin{aligned}
K_n^*(e_2;q;x) &= \frac{b_n^2}{[n]_n^2}\frac{1}{[3]_q}E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!(b_n)^k}\left(q[k]_q+1\right)^2\right.\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}\left(q^2[k-1]_q+q+1\right)\\
&\quad\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}\left(q[k-1]_q+1\right)\right\}\\
&=\frac{1}{[3]_q}\frac{b_n^2}{[n]_n^2}E_q\left(-[n]_q\frac{x}{b_n}\right)\\
&\quad\times\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}q^2[k]_q+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}q+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!(b_n)^k}\right.\\
&\quad+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-2]_q!(b_n)^k}q^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}q+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}\\
&\quad\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-2]_q!(b_n)^k}q+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k-1]_q!(b_n)^k}\right\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.6 ve Eş. 3.7 den tekrar yararlanarak

$$K_n^*(e_2;q;x) = \frac{1}{[n]_q^2}\frac{1}{[3]_q}\left\{[n]_q^2 q^3 x^2 + b_n[n]_q q^2 x + 2b_n[n]_q qx + b_n^2\right.$$

$$= [n]_q^2 q^2 x^2 + b_n [n]_q qx + b_n [n]_q x + [n]_q^2 qx^2 + b_n [n]_q x \Big\}$$

olur. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$K_n^*(e_2;q;x) = qx^2 + \frac{q^2+3q+2}{[3]_q}\frac{b_n}{[n]_q}x + \frac{1}{[3]_q}\frac{b_n^2}{[n]_q^2}$$

ede edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3.1. Ağırlıklı İstatistiksel Yaklaşım Özellikleri

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (1951) tarafından geliştirilmiştir. Toplanabilme Teorisi, Fonksiyonel Analiz, Fourier Serileri, Sayılar Teorisi, Ölçü Teorisi, İstatistik, Optimizasyon Teorisi ve Yaklaşımlar Teorisi gibi birçok alanda kullanılan bu kavram Salat (1980), Connor (1988) ve Fridy (1985) gibi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Öncelikle bu kavramın tanımını hatırlatalım.

$K \subset \mathbb{N}$ kümesi için $K_n := \{k \le n : \ k \in K\}$ olmak üzere K_n kümesinin eleman sayısı $|K_n|$ ile gösterilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [Niven ve ark. 1980].

Örnek

$$\delta(\mathbb{N}) = 1, \ \delta\left(\{n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}\right) = 0,$$

$$\delta\left(\{2n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \delta\left(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}\right) = \frac{1}{2}$$

olduğu yoğunluk tanımından elde edilir. Doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Ayrıca K kümesinin yoğunluğu mevcut ise $\mathbb{N}/K$ kümesinin yoğunluğu

$\delta\left(\mathbb{N}/K\right) = 1 - \delta\left(K\right)$ olacaktır.

$\left(x_k\right)$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(k \in \mathbb{N} : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|x_k - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olması demektir ve $st - \lim_n x_n = L$ ile gösterilir [Fast, 1951].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından anlaşılabildiği gibi, eğer $\left(x_k\right)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durumda, istatistiksel yakınsaklığı bilinen bir dizi klasik anlamda yakınsak olmayabilir. Diğer taraftan $\left(x_k\right)$ dizisi bir L sayısına klasik anlamda yakınsak ise herhangi bir $\varepsilon > 0$ dışında dizinin sonlu elemanı olması bu elemanların yoğunluğunun sıfır olması demektir. Buradan klasik anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu görülmektedir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayı c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayı da st ile gösterilirse, bu durumda $c \subset st$ olduğu görülür.

Örnek

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise} \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases} \quad (m = 1,2,3,...)$$

şeklinde (x_k) dizisi tanımlansın. Burada $st - \lim_k x_k = 0$ olmasına rağmen (x_k) dizisinin bir alt dizisi $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} = \infty$ ıraksak olduğundan (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat istatistiksel yakınsak dizilerin örnekte olduğu gibi sınırlı olması gerekmez.

Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı ile Korovkin tipli bir teorem ispatlanmıştır.

3.1. Teorem (Gadjiev ve Orhan, 2002)

$T_n : C_B[a,b] \to B[a,b]$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$st - \lim_n \left\| T_n(e_m;.) - e_m \right\|_{C[a,b]} = 0, \;\; e_m(t) = t^m, \;\; m = 0,1,2$$

koşulları sağlanıyor ise her $f \in C_B[a,b]$ için

$$st - \lim_n \left\| T_n(f;.) - f \right\|_{C[a,b]} = 0$$

dır. Burada, $B[a,b]$, $[a,b]$ aralığında sınırlı, $C_B[a,b]$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve tüm pozitif eksende sınırlı fonksiyonların kümesidir.

Eş. 3.2 ile verilen $q-$Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerin tanım kümesi $\left[0,\frac{b_n}{1-q^n}\right)$, $n\to\infty$ için çok büyür. Bilinen Korovkin teoremi sınırsız aralıklarda çalışmadığı için Gadjiev (1974) sınırsız aralıklarda yaklaşım özelliklerini elde edebilmek için ağırlıklı uzayda Korovkin tipli bir teorem vermiştir. Duman ve Orhan (2004, 2005) ise ağırlıklı uzayda istatistiksel yaklaşım özelliklerini incelememizi sağlayacak bir teorem elde etmişlerdir. Agratini ve Doğru (2010) ise Duman ve Orhan (2004) deki teoremlerinden yararlanarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

3.2. Teorem (Agratini ve Doğru, 2010)

$T_n : C_{1+x^2}\left[0,\infty\right)\to B_{1+x^{2+\lambda}}\left[0,\infty\right)$, $\lambda>0$, lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her $f\in C_{1+x^2}\left[0,\infty\right)$ olmak üzere

$$st-\lim_n\left\|T_n\left(f;.\right)-f\right\|_{1+x^{2+\lambda}}=0$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st-\lim_n\left\|T_n\left(e_m;.\right)-e_m\right\|_{1+x^2}=0,\ m=0,1,2$$

olmasıdır.

Bu kısmın asıl amacı Eş. 3.2 ile verilen operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özelliklerini Teorem 3.2 yardımı ile elde etmektir.

$\left(q_n\right)$, $\left(0,1\right)$ aralığında

$$st-\lim_n q_n=1 \text{ ve } st-\lim_n\frac{b_n}{\left[n\right]_{q_n}}=0 \tag{3.8}$$

koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Eş. 3.2, q ile (q_n) yer değiştirirse

$$K_n^*(f;q_n;x) = [n]_{q_n} E_{q_n}\left(-[n]_{q_n}\frac{x}{b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty} q_n^{-k}\frac{\left([n]_{q_n}x\right)^k}{[k]_{q_n}!(b_n)^k}\int_{[k]_{q_n}/[n]_{q_n}}^{[k+1]_{q_n}/[n]_{q_n}} f(b_n t)\, d_{q_n}t, \qquad (3.9)$$

operatörler dizisine dönüşür.

3.3. Teorem (Örkcü ve Doğru, 2011)

(q_n), Eş. 3.8 koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Eş. 3.9 ile tanımlanan $K_n^*(f;q_n;x)$ operatörler dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $f \in C_{1+x^2}[0,\infty)$, $\lambda > 0$, $0 \le x < \dfrac{b_n}{1-q_n^n}$ için $st-\lim_n \left\| K_n^*(f;q_n;.) - f \right\|_{1+x^{2+\lambda}} = 0$ dır.

İspat

Lemma 3.1'in sonucu olarak $x \in \left[0, \dfrac{b_n}{1-q_n^n}\right)$ için C pozitif sabit olmak üzere $\left|K_n^*(1+t^2;q_n;x)\right| \le C(1+x^2)$ olduğundan, $\{K_n^*(f;q_n;x)\}$, C_{1+x^2}'den $B_{1+x^{2+\lambda}}$'ya tanımlı lineer pozitif operatörler dizisidir.

Eş. 3.3'den görülebilir ki,

$$st-\lim_n \left\| K_n^*(e_0;q_n;.) - e_0 \right\|_{1+x^2} = 0$$

dır.

Eş. 3.4 den ise

$$\sup_{0\le x<\frac{b_n}{1-q^n}} \frac{\left|K_n^*\left(e_1;q_n;x\right)-e_1\left(x\right)\right|}{1+x^2} = \sup_{0\le x<\frac{b_n}{1-q^n}} \frac{\left|x+\frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}-x\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{0\le x<\frac{b_n}{1-q^n}} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

$$= \frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $st-\lim_n \frac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$ olduğu için $st-\lim_n \left\|K_n^*\left(e_1;q_n;.\right)-e_1\right\|_{1+x^2}=0$

dır. Benzer olarak Eş. 3.5 den

$$\sup_{0\le x<\frac{b_n}{1-q^n}} \frac{\left|K_n^*\left(e_2;q_n;x\right)-e_2\left(x\right)\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{0\le x<\frac{b_n}{1-q^n}} \frac{\left|q_n x^2+\frac{[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2}{[3]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}x+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}-x^2\right|}{1+x^2}$$

$$\le \left(1-q_n\right)+\frac{[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2}{2[3]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}$$

bulunur ve böylece

$$\left\|K_n^*\left(e_2;q_n;.\right)-e_2\left(x\right)\right\|_{1+x^2} \le \left(1-q_n\right)+\frac{[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2}{2[3]_{q_n}}\frac{b_n}{[n]_{q_n}}+\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Diğer yandan, her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$D := \left\{ n : \left\| K_n^* \left(e_2 ; q_n ; . \right) - e_2 \left(x \right) \right\|_{1+x^2} \geq \varepsilon \right\},$$

$$D_1 := \left\{ n : 1 - q_n \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$D_2 := \left\{ n : \frac{[2]_{q_n} + [2]_{q_n}^2}{2[3]_{q_n}} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$D_3 := \left\{ n : \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

O taktirde Eş. 3.10 dan $D \subseteq D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu görülür ve dolayısıyla

$$\delta\left(\left\{ n \leq n_0 : \left\| K_n^* \left(e_2 ; q_n ; . \right) - e_2 \left(x \right) \right\|_{1+x^2} \geq \varepsilon \right\} \right) = \delta\left(D \right) \leq \delta\left(D_1 \right) + \delta\left(D_2 \right) + \delta\left(D_3 \right)$$

yazılabilir. Eş. 3.8 koşulundan $st - \lim\limits_{n\to\infty} 1 - q_n = 0$, $st - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[2]_{q_n} + [2]_{q_n}^2}{2[3]_{q_n}} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ve $st - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} = 0$ olup, buradan

$$\delta\left(D_1 \right) + \delta\left(D_2 \right) + \delta\left(D_3 \right) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik göz önüne alındığında

$$st - \lim_{n} \left\| K_n^* \left(e_2 ; q_n ; . \right) - e_2 \right\|_{1+x^2} = 0$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

3.2. Voronovskaja Tipli Yaklaşım Hızı

Bu bölümde Eş. 3.9 verilen operatörler dizisi için Voronovskaja tipli bir teorem verilmiştir.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ise (a_n) dizisine sonsuz küçülen denir. (a_n) ve (b_n) dizisi sonsuz küçülen diziler olsun.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ise, (a_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (b_n) dizisininkinden daha hızlıdır denir.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise, (b_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (a_n) dizisininkinden daha hızlıdır denir.

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerinin sıfıra yaklaşma hızları aynıdır.

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ise c ye asimptotik değer, (b_n) dizisine de (a_n) dizisinin asimptotik hızı denir. Yani (a_n) nin 0'a yaklaşma hızı (b_n) nin 0'a yaklaşma hızı ile belirlenir.

3.4. Teorem [Örkcü ve Doğru, 2011]

(q_n), Eş. 3.8 koşullarını sağlayan bir dizi ve $f \in C[0,\infty)$, sınırlı ve azalmayan bir fonksiyon ve yeterince büyük n ler için $x \in \left[0, \dfrac{b_n}{1-q_n^n}\right)$ noktasında $D_{q_n}^2 f(x)$ ikinci mertebeden türevi mevcut ise o taktirde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left(K_n^*(f;q_n,x)-f(x)\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{q_n\to 1} D_{q_n} f(x)+x\lim_{q_n\to 1} D_{q_n}^2 f(x)\right)$$

dır.

İspat

f için $q-$Taylor Formülünden [Rajkovich ve ark. 2002], $0<q<1$ ve $(t-x)_q^2=(t-x)(t-qx)$ olmak üzere

$$f(t)=f(x)+D_q f(x)(t-x)+\frac{1}{[2]_q}D_q^2 f(x)(t-x)_q^2+\phi_q(x,t)(t-x)_q^2$$

yazılabilir. $q-$L'Hospital Kuralı [bkz. Aral, 2008] uygulandığında öyle bir $\hat{q}_1 \in (0,1)$ sayısı vardır ki her $q \in (\hat{q}_1,1)$ için Eş. 2.1 ve Eş. 2.2 den

$$\lim_{t\to x}\phi_q(x,t)=\lim_{t\to x}\frac{D_q f(t)-D_q f(x)-D_q^2 f(x)(t-x)}{[2]_q(t-x)}$$

yazılabilir. Tekrar $q-$L'Hospital Kuralı uygulandığında $\hat{q}_2 \in (0,1)$ $(\hat{q}_1<\hat{q}_2)$ sayısı vardır ve her $q \in (\hat{q}_2,1)$ için

$$\lim_{t\to x}\phi_q(x,t)=\lim_{t\to x}\frac{D_q^2 f(t)-D_q^2 f(x)}{[2]_q}=0$$

sağlanır. Sonuçta her $q\in(\hat{q}_2,1)$ için $\phi_q(x,t)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left(K_n^*(f;q_n,x)-f(x)\right)&=D_{q_n}f(x)\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x);q_n,x\right)\\&\quad+\frac{D_{q_n}^2 f(x)}{[2]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x)_{q_n}^2;q_n,x\right)\\&\quad+\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left(\phi_{q_n}(x,t)(t-x)_{q_n}^2;q_n,x\right)\\&=D_{q_n}f(x)\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x);q_n,x\right)\\&\quad+\frac{D_{q_n}^2 f(x)}{[2]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x)^2;q_n,x\right)\\&\quad+\frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left\{\frac{D_{q_n}^2 f(x)}{[2]_{q_n}}x(1-q_n)K_n^*\left((t-x);q_n,x\right)\right.\\&\quad\left.+K_n^*\left(\phi_{q_n}(x,t)(t-x)_{q_n}^2;q_n,x\right)\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Eş. 3.3-3.5 ten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x);q_n,x\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x)^2;q_n,x\right)=x$$

dir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left(K_n^*\left(f;q_n,x\right)-f\left(x\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\lim_{q_n\to 1}D_{q_n}f\left(x\right)+x\lim_{q_n\to 1}D_{q_n}^2 f\left(x\right)\right)$$
$$+\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left(\phi_{q_n}\left(x,t\right)\left(t-x\right)_{q_n}^2;q_n,x\right) \tag{3.11}$$

elde edilir. $\lim_{t\to x}\phi_{q_n}\left(x,t\right)=0$ olduğundan her $\varepsilon>0$ için, en az bir $\delta\left(\varepsilon\right)>0$ sayısı vardır öyle ki yeterince büyük n ler için $x\in\left[0,\frac{b_n}{1-q_n^n}\right)$ olmak üzere

$\left|t-x\right|<\delta$ iken $\left|\phi_{q_n}\left(x,t\right)\right|<\varepsilon$

sağlanır. Diğer yandan sınırlılıktan dolayı $\left|t-x\right|\geq\delta$ iken $M>0$ sabit sayı olmak üzere

$$\left|\phi_{q_n}\left(x,t\right)\right|\leq\frac{M}{\delta^2}\left(t-x\right)^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left(\phi_{q_n}\left(x,t\right)\left(t-x\right)_{q_n}^2;q_n,x\right)=\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left(\phi_{q_n}\left(x,t\right)\left(t-x\right)^2;q_n,x\right)$$
$$+\frac{[n]_{q_n}}{b_n}x\left(1-q_n\right)K_n^*\left(\phi_{q_n}\left(x,t\right)\left(t-x\right);q_n,x\right)$$
$$\leq\varepsilon\frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left\{K_n^*\left(\left(t-x\right)^2;q_n,x\right)\right.$$
$$\left.+x\left(1-q_n\right)K_n^*\left(\left(t-x\right);q_n,x\right)\right\} \tag{3.12}$$
$$+\frac{M}{\delta^2}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}\left\{K_n^*\left(\left(t-x\right)^4;q_n,x\right)\right.$$
$$\left.+x\left(1-q_n\right)K_n^*\left(\left(t-x\right)^3;q_n,x\right)\right\}$$

yazılabilir. Diğer yandan Eş. 3.3-3.5 kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
K_n^*\left((t-x)^4;q_n,x\right) &= x^4\left(q_n^6-4q_n^3+6q_n-3\right) \\
&\quad +x^3\frac{b_n}{[n]_{q_n}}\left\{q_n^3\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)-4\left(1+[2]_{q_n}\right)q_n+6\right. \\
&\quad -\frac{4}{[2]_{q_n}}+6\frac{2[2]_{q_n}-1}{[3]_{q_n}}-4\frac{\left(3[3]_{q_n}-[2]_{q_n}-1\right)q_n}{[4]_{q_n}} \\
&\quad \left.+\frac{\left(4[4]_{q_n}-\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)\right)q_n^3}{[5]_{q_n}}\right\} \\
&\quad +x^2\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}\left\{2q_n^4+q_n\left(1+[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2\right)-4+\frac{6}{[3]_{q_n}}\right. \\
&\quad -\frac{4}{[4]_{q_n}}\left(3[2]_{q_n}^2-[2]_{q_n}\right)+\frac{\left(4[4]_{q_n}-\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)\right)\left(1+[2]_{q_n}\right)q_n}{[5]_{q_n}} \\
&\quad \left.+\frac{\left(4q_n+[2]_{q_n}\left(2[2]_{q_n}-1\right)\right)q_n}{[5]_{q_n}}\right\} \\
&\quad +x\frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3}\left\{1-\frac{4}{[4]_{q_n}}+\frac{q_n^3+3[2]_{q_n}^3}{[5]_{q_n}}\right\}+\frac{b_n^4}{[n]_{q_n}^4}\frac{1}{[5]_{q_n}}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ için

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}\left(q_n^6-4q_n^3+6q_n-3\right)}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-q_n^n\right)\left(\dfrac{q_n^6-4q_n^3+6q_n-3}{1-q_n}\right)}{b_n}=0
$$

olduğundan $x\in\left[0,\dfrac{b_n}{1-q_n^n}\right)$ ve yeterince büyük n ler için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x)^4;q_n,x\right)=0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\lim_{n\to\infty}(1-q_n)\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left((t-x)^3;q_n,x\right)=0 \tag{3.14}$$

olacağından, $x\in\left[0,\frac{b_n}{1-q_n^n}\right)$ ve yeterince büyük n ler için Eş. 3.12-3.14 den

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n]_{q_n}}{b_n}K_n^*\left(\phi_{q_n}(x,t)(t-x)_{q_n}^2;q_n,x\right)=0$$

elde edilir ve Eş. 3.11 den dolayı ispat tamamlanır.

Uyarı

Teorem 3.4 ün koşulları altında Eş. 3.9 ile verilen operatörler dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınsama oranı $\mathrm{O}\left(\frac{b_n}{[n]_{q_n}}\right)$ dir.

4. KANTOROVICH TİPLİ $q-$ SZASZ-MIRAKJAN OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ORANI

Bu bölümde Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin yeni bir $q-$ genelleşmesi tanımlanmıştır. Bunun yanında yeni oluşturulan $q-$ Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin bazı test fonksiyonlarını koruyan iki farklı modifikasyonu verilmiştir. Bilinen diğer operatörler için bu tipli modifikasyonlar King (2003), Agratini (2006), Duman ve Özarslan (2007), Özarslan ve Duman (2007), Duman, Özarslan ve Della Vechia (2009), Doğru ve Örkcü (2009), Doğru ve Örkcü (2010), Agratini ve Doğru (2010) çalışmalarında bulunabilir.

Her pozitif tamsayı n ve $q \in (0,1)$ için,

$$K_n^q(f;x) = [n]_q E_q\left(-[n]_q \frac{x}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q! q^k} \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} f(t)\, d_q t \tag{4.1}$$

şeklinde $q-$ Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerini tanımlayalım [Örkcü ve Doğru, baskıda]. Burada f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve azalmayan fonksiyondur. Ayrıca $0 \leq x < \dfrac{1}{1-q^n}$, ve $E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \dfrac{x^n}{[n]_q!}$ dir. Öncelikle Eş. 4.1 ile verilen $K_n^q(f;x)$ lineer pozitif operatörleri için aşağıdaki lemmayı verelim.

4.1. Lemma

$x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O taktirde

$K_n^q(e_0;x) = 1,$

$$K_n^q\left(e_1;x\right)=\frac{2}{[2]_q}x^2+\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q},$$

$$K_n^q\left(e_2;x\right)=\frac{3q}{[3]_q}x+\frac{3[2]_q}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$[k+1]_q=q[k]_q+1,\ \int\limits_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_qt=\dfrac{1}{[n]_q}$ olduğundan $K_n^q\left(e_0;x\right)=1$ dir.

$$\int\limits_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} td_qt=\frac{2q[k]_q}{[2]_q[n]_q^2}+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n]_q^2}$$

ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}K_n^q\left(e_1;x\right)&=E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2q[k]_q}{[2]_q[n]_q}\frac{\left([n]_qx\right)^k}{[k]_q!q^k}\\&\quad+E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q}\frac{\left([n]_qx\right)^k}{[k]_q!q^k}\\&=\frac{2}{[2]_q}x+\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\int\limits_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^2d_qt=\dfrac{1}{[3]_q[n]_q^3}\left(3q^2[k]_q^2+3q[k]_q+1\right)$ ifadesi kullanılarak

$$K_n^q(e_2;x)=E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3q^2[k]_q^2}{[3]_q[n]_q^2}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}$$

$$+E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3q[k]_q}{[3]_q[n]_q^2}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}$$

$$+E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[3]_q[n]_q^2}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}$$

elde edilir. Terimler düzenlendiğinde,

$$K_n^q(e_2;x)=\frac{3}{[3]_q}\left(qx^2+\frac{q}{[n]_q}x\right)+\frac{3}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Uyarı

Lemma 4.1 de $q=1$ alınırsa, Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin momentleri elde edilebilir [Gupta ve ark. 2006].

Bilinen birçok lineer pozitif operatörler birinci ve ikinci test fonksiyonlarını korur. Yani, $e_i(x)=x^i$, $i\geq 0$ olmak üzere $T_n(e_0)=e_0$ ve $T_n(e_1)=e_1$, $n\in\mathbb{N}$ dir. Örneğin bu koşulları Bernstein polinomları, Baskakov operatörleri, Szasz-Mirakjan operatörleri sağlar [Altomare ve Campiti, 1994]. King ise e_0 ve e_2 test fonksiyonlarının koruyan V_n lineer pozitif operatörlerin bir dizisini tanımlamıştır. Ayrıca $0\leq x\leq\frac{1}{3}$ için V_n operatörlerinin klasik Bernstin polinomlarından daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu göstermiştir [King, 2003]. Duman ve Özarslan ise bir lineer pozitif operatörler dizisi tanımlayıp bu operatörler dizisinin klasik Szasz-Mirakjan operatörlerinden daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu göstermişlerdir [Duman ve Özarslan, 2007]. Daha sonra Agratini ve Doğru, $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin King tipli modifikasyonunu tanımlamış ve bu operatörler dizisinin klasik Szasz-Mirakjan operatörlerinden daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu göstermişlerdir [Agratini ve Doğru, 2010]. Doğru ve Örkcü ise Meyer-König-Zelller operatörler dizisinin King tipli modifikasyonunu tanımlamış ve bu operatörler dizisinin klasik Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörler dizisinden daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca $q-$MKZ operatörler dizisinin King tipli modifikasyonunun klasik MKZ operatörler dizisinin King tipli modifikasyonundan daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu ispatlamışlardır [Doğru ve Örkcü, 2009]. Özarslan ve Duman ise klasik MKZ operatörler dizisinin farklı bir modifikasyonu vermiş ve $\left[\frac{1}{2},1\right)$ aralığında daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu ispatlamışlardır [Özarslan ve Duman, 2007]. Daha sonra Doğru ve Örkcü, $q-$MKZ operatörler dizisinin farklı bir modifikasyonu vermişler ve $\left[\alpha_{n,1}\right)\subset\left[\frac{1}{2},1\right)$ aralığında daha iyi yakınsaklık oranına sahip olduğunu ispatlamışlardır [Doğru ve Örkcü, 2010].

Burada ise $q-$Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin bazı test fonksiyonlarını koruyan iki farklı modifikasyonu verilmiştir [Örkcü ve Doğru, baskıda].

$\{r_n(x)\}$, $[0,\infty)$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon dizisi olmak üzere

$$r_n(x):=\frac{[2]_q}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{[n]_q},\ n\in\mathbb{N},\ x\in\left[\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q},\frac{1}{1-q^n}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Açıktır ki $0\le r_n(x)<\infty$ dur. Aşağıdaki lineer pozitif operatörler dizisini tanımlayalım:

$$\widetilde{K_n^q}\left(f;x\right)=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q \frac{r_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q r_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q!q^k}\int_{q\left[k\right]_q/\left[n\right]_q}^{\left[k+1\right]_q/\left[n\right]_q} f\left(t\right)d_q t \tag{4.2}$$

Burada f, $\left[0,\infty\right)$ aralığında sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

4.2. Lemma

Eş. 4.2 deki operatörleri göz önüne alalım. Her bir $\frac{1}{\left[2\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}\leq x<\frac{1}{1-q^n}$ için

$$\widetilde{K_n^q}\left(e_0;x\right)=1,$$

$$\widetilde{K_n^q}\left(e_1;x\right)=x,$$

$$\widetilde{K_n^q}\left(e_2;x\right)=\frac{3q}{4}\frac{\left[2\right]_q^2}{\left[3\right]_q}x^2+\frac{3}{2}\frac{\left[2\right]_q}{\left[3\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}x-\left(\frac{3q}{4\left[3\right]_q}+\frac{1}{2\left[3\right]_q}\right)\frac{1}{\left[n\right]_q^2}$$

sağlanır.

İspat

Lemma 4.1 in ispatı göz önüne alınarak

$$\widetilde{K_n^q}\left(e_0;x\right)=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q \frac{r_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q r_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q!q^k}\int_{q\left[k\right]_q/\left[n\right]_q}^{\left[k+1\right]_q/\left[n\right]_q} d_q t=1$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\widetilde{K_n^q}(e_1;x) = [n]_q E_q\left(-[n]_q \frac{r_n(x)}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q r_n(x)\right)^k}{[k]_q! q^k} \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t d_q t$$

$$= [n]_q E_q\left(-[n]_q \frac{r_n(x)}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q r_n(x)\right)^k}{[k]_q! q^k} \left(\frac{2q[k]_q}{[2]_q [n]_q^2} + \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n]_q^2} \right)$$

$$= \frac{2}{[2]_q} r_n(x) + \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[n]_q}$$

$$= \frac{2}{[2]_q} \left(\frac{[2]_q}{2} x - \frac{1}{2} \frac{1}{[n]_q} \right) + \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[n]_q}$$

$$= x$$

elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{K_n^q}(e_2;x) = [n]_q E_q\left(-[n]_q \frac{r_n(x)}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q r_n(x)\right)^k}{[k]_q! q^k} \int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^2 d_q t$$

$$= [n]_q E_q\left(-[n]_q \frac{r_n(x)}{q}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left([n]_q r_n(x)\right)^k}{[k]_q! q^k} \left(\frac{1}{[3]_q [n]_q^3} \left(3q^2 [k]_q^2 + 3q[k]_q + 1\right) \right)$$

$$= \frac{3}{[3]_q} \left(q r_n^2(x) + \frac{q}{[n]_q} r_n(x) \right) + \frac{3}{[3]_q} \frac{1}{[n]_q} r_n(x) + \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[n]_q^2}$$

$$= \frac{3q}{4} \frac{[2]_q^2}{[3]_q} x^2 + \frac{3}{2} \frac{[2]_q}{[3]_q} \frac{1}{[n]_q} x - \left(\frac{3q}{4[3]_q} + \frac{1}{2[3]_q} \right) \frac{1}{[n]_q^2}$$

eşitliği sağlanır ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.2 den görülür ki, $\widetilde{K_n^q}$ lineer pozitif operatörleri lineer fonksiyonları korur.

Yani $h(t) = ct + d$ (c,d reel sayı) için $\widetilde{K_n^q}(h;x) = h(x)$, $x \in \left[\frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[n]_q}, \frac{1}{1-q^n} \right)$ dır.

$\{u_n(x)\}$, $[0,\infty)$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyon dizisi olmak üzere $n\in\mathbb{N},\ x\in\left[\frac{1}{\sqrt{[3]_q}}\frac{1}{[n]_q},\frac{1}{1-q^n}\right)$ için

$$u_n(x):=-\frac{[2]_q}{2q}\frac{1}{[n]_q}+\sqrt{\frac{[2]_q^2}{4q^2[n]_q^2}+\frac{[3]_q}{3q}x^2-\frac{1}{3q[n]_q^2}}$$

şeklinde tanımlansın ve bu fonksiyon dizisi yardımıyla

$$\overline{K_n^q}(f;x)=[n]_q\,E_q\left(-[n]_q\frac{u_n(x)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q\,u_n(x)\right)^k}{[k]_q!\,q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}f(t)\,d_qt \tag{4.3}$$

lineer pozitif operatörünü tanımlayalım. Burada f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

4.3. Lemma

Eş. 4.3 ile tanımlı operatörleri göz önüne alalım. Her bir $\frac{1}{\sqrt{[3]_q}}\frac{1}{[n]_q}\le x<\frac{1}{1-q^n}$ için

$$\overline{K_n^q}(e_0;x)=1,$$

$$\overline{K_n^q}(e_1;x)=\frac{2}{[2]_q}\sqrt{\frac{[2]_q^2}{4q^2[n]_q^2}+\frac{[3]_q}{3q}x^2-\frac{1}{3q[n]_q^2}}-\frac{1}{q[2]_q}\frac{1}{[n]_q},$$

$$\overline{K_n^q}(e_2;x)=x^2$$

sağlanır.

İspat

Lemma 4.1 in ispatındaki gibi

$$\overline{K_n^q}\left(e_0;x\right)=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q\frac{u_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q u_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q!q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}d_qt=1$$

eşitliği kolayca görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\overline{K_n^q}\left(e_1;x\right)&=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q\frac{u_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q u_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q!q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}td_qt\\&=\left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q\frac{u_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q u_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q!q^k}\left(\frac{2q\left[k\right]_q}{\left[2\right]_q\left[n\right]_q^2}+\frac{1}{\left[2\right]}\frac{1}{\left[n\right]_q^2}\right)\\&=\frac{2}{\left[2\right]_q}u_n\left(x\right)+\frac{1}{\left[2\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}\\&=\frac{2}{\left[2\right]_q}\left(-\frac{\left[2\right]_q}{2q}\frac{1}{\left[n\right]_q}+\sqrt{\frac{\left[2\right]_q^2}{4q^2\left[n\right]_q^2}+\frac{\left[3\right]_q}{3q}x^2-\frac{1}{3q\left[n\right]_q^2}}\right)+\frac{1}{\left[2\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}\\&=\sqrt{\frac{\left[2\right]_q^2}{4q^2\left[n\right]_q^2}+\frac{\left[3\right]_q}{3q}x^2-\frac{1}{3q\left[n\right]_q^2}}-\frac{1}{q\left[2\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Diğer taraftan $\overline{K_n^q}$ operatörlerinin $e_2\left(x\right)$ test fonksiyonunu koruduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$
\begin{aligned}
\overline{K_n^q}\left(e_2;x\right) &= \left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q \frac{u_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q u_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q! q^k}\int_{q\left[k\right]_q/\left[n\right]_q}^{\left[k+1\right]_q/\left[n\right]_q} t^2 d_q t \\
&= \left[n\right]_q E_q\left(-\left[n\right]_q \frac{u_n\left(x\right)}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left[n\right]_q u_n\left(x\right)\right)^k}{\left[k\right]_q! q^k}\left(\frac{1}{\left[3\right]_q\left[n\right]_q^3}\left(3q^2\left[k\right]_q^2+3q\left[k\right]_q+1\right)\right) \\
&= \frac{3}{\left[3\right]_q}\left(qu_n^2\left(x\right)+\frac{q}{\left[n\right]_q}u_n\left(x\right)\right)+\frac{3}{\left[3\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q}u_n\left(x\right)+\frac{1}{\left[3\right]_q}\frac{1}{\left[n\right]_q^2} \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlanması ise ispatı tamamlar.

4.1. Noktasal Yaklaşım Oranı

Yaklaşımlar teorisinde operatörlerin düzgün yakınsaklığının yanı sıra bu yakınsamanın oranının değerlendirilmesi de önemli bir konudur. Bu değerlendirme genellikle süreklilik modülü ve Hölder eşitsizliğinden faydalanarak yapılabilmektedir. $q-$integralin $\left[0,b\right]$ ve $\left[0,a\right]$ aralığındaki iki $q-$integral farkı olarak tanımlanmasından ortaya çıkan zorluk nedeniyle, $q-$integral için Hölder eşitsizliği genel durumda geçerli değildir. Bu yüzden Kantorovich tipli operatörlerinin $q-$genelleşmeleri, $q-$integrali içerdiğinden yaklaşım oranı kolaylıkla hesaplanamaz. Bu zorluğu gidermek için, aşağıdaki Lemma 4.4 ispatlanmış ve bu lemma yardımıyla oluşturulan $q-$Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörler dizisinin yaklaşım oranı hesaplanmıştır.

4.4. Lemma (Örkcü ve Doğru, baskıda)

$0<q<1$ ve $a\in\left[0,bq\right], b>0$ için

$$
\left(\int_a^b\left|t-x\right|d_q t\right)\le\left(\int_a^b\left(t-x\right)^2 d_q t\right)^{1/2}\left(\int_a^b d_q t\right)^{1/2}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat

$k = 0,1,2$ için

$$\begin{aligned}\int_a^b t^k d_q t &= (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^{kj} bq^j - (1-q)a\sum_{j=0}^{\infty} q^{kj} aq^j \\ &= \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\frac{1-q}{1-q^{k+1}}\end{aligned}$$

dır. Buradan $\int_a^b |t-x| d_q t = (b-a)\left|\frac{b+a}{1+q} - x\right|$ ve

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b (t-x)^2 d_q t\right)\left(\int_a^b d_q t\right) \\ &= \left((b-a)\frac{b^2+a^2+ab}{1+q+q^2} - 2x(b-a)\frac{b+a}{1+q} + x^2(b-a)\right)(b-a)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$\left(\int_a^b |t-x| d_q t\right)^2 - \left(\int_a^b (t-x)^2 d_q t\right)\left(\int_a^b d_q t\right) = (b-a)^2\left(\left(\frac{b+a}{1+q}\right)^2 - \frac{b^2+a^2+ab}{1+q+q^2}\right)$$

yazılır. Eğer

$$\varphi(a) := -b^2 q + ab + abq^2 - a^2 q$$

dersek, $\varphi(0)<0,\ \varphi(bq)=0$ ve $[0,bq]$ aralığında φ fonksiyonu monoton artan olduğundan $\forall a\in[0,bq],\ b>0,\ q\in(0,1)$ için $\varphi(a)\le 0$ dır. Bu da gösterir ki; $\forall a\in[0,bq],\ b>0,\ q\in(0,1)$ için

$$\left(\int_a^b |t-x|\, d_q t\right)^2 - \left(\int_a^b (t-x)^2\, d_q t\right)\left(\int_a^b d_q t\right) \le 0$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

$f\in C_B[0,\infty)$ ($[0,\infty)$ da sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı) ve $x\ge 0$, $\delta>0$

$$\omega(f,\delta)=\sup_{x-\delta\le t\le x+\delta}\left|f(t)-f(x)\right|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\omega(f;\delta)\ge 0$

ii) $\delta_1\le\delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$

iii) $m\in\mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta)\le m\omega(f;\delta)$

iv) $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta)\le(\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$

vi) $\left|f(t)-f(x)\right| \leq \omega\left(f;|t-x|\right)$

vii) $\left|f(t)-f(x)\right| \leq \left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega\left(f;\delta\right)$

Lemma 4.1 den $\psi_x^k(t)=(t-x)^k$ olmak üzere

$$K_n^q\left(\psi_x^2;x\right)=\left(\frac{3q}{[3]_q}-\frac{4}{[2]_q}+1\right)x^2+\left(\frac{3[2]_q}{[3]_q}-\frac{2}{[2]_q}\right)\frac{1}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2} \tag{4.4}$$

elde edilir.

(q_n), $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} q_n^n=1 \ \ ve \ \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n]_{q_n}}=0 \tag{4.5}$$

koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Örneğin (q_n) dizisi $q_n=e^{1/n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ olarak seçildiğinde Eş. 4.5 koşulları sağlanır.

4.1. Teorem

(q_n), Eş. 4.5 koşullarını sağlayan bir dizi olsun. $f\in C_B[0,\infty)$ da azalmayan bir fonksiyon ve $0\leq x<\dfrac{1}{1\text{-}q_n^n}$ olduğunda

$$\left|K_n^{q_n}(f;x)-f(x)\right|\leq 2\omega\left(f,\delta_n\right)$$

sağlanır. Burada $\delta_n(x) := \sqrt{K_n^{q_n}(\psi_x^2; x)}$ dır [Örkcü ve Doğru, baskıda].

İspat

$f \in C_B[0,\infty)$ da azalmayan bir fonksiyon ve $0 \le x < \dfrac{1}{1\text{-}q^n}$ için $K_n^q(f;x)$ in lineerliğini ve monotonluğunu kullanarak, $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|K_n^q(f;x) - f(x)\right| &\le K_n^q\left(\left|f(t) - f(x)\right|;x\right)\\ &\le \omega(f,\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}K_n^q\left(|t-x|;x\right)\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. $K_n^q(e_0;x) = 1$ ve $a = q[k]_q/[n]_q$, $b = [k+1]_q/[n]_q$ olmak üzere Lemma 4.4 göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\left|K_n^q(f;x) - f(x)\right| \le \omega(f,\delta)\Bigg\{1 + \frac{1}{\delta}[n]_q E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}\\ \left(\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}(t-x)^2 d_q t\right)^{1/2}\left(\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t\right)^{1/2}\Bigg\}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan toplam için Hölder eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}= \omega(f,\delta)\Bigg\{1 + \frac{1}{\delta}\left([n]_q E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q}(t-x)^2 d_q t\right)^{1/2}\\ \left([n]_q E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} d_q t\right)^{1/2}\Bigg\}\end{aligned}$$

$$= \omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(K_n((t-x)^2;q;x)\right)^{1/2}\right\}$$

olur. Eş. 4.4 göz önüne alınarak, $q = q_n$ Eş. 4.5 koşullarını sağlayan dizi ve $\delta = \delta_n(x)$ seçildiğinde ispat tamamlanır.

Lemma 4.2 den her bir $\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q} \le x < \frac{1}{1-q^n}$ için,

$$\widetilde{K_n^q}\left(\psi_x^2;x\right) = \left(\frac{3q}{4}\frac{[2]_q^2}{[3]_q}-1\right)x^2 + \frac{3[2]_q}{2[3]_q}\frac{1}{[n]_q}x - \left(\frac{3q}{4[3]_q}+\frac{1}{2[3]_q}\right)\frac{1}{[n]_q^2} \tag{4.6}$$

sağlanır.

4.2. Teorem

(q_n), Eş. 4.5 koşullarını sağlayan bir dizi olsun. $f \in C_B[0,\infty)$ da azalmayan bir fonksiyon $\frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{1}{[n]_{q_n}} \le x < \frac{1}{1\text{-}q_n^n}$ için

$$\left|\widetilde{K_n^{q_n}}(f;x) - f(x)\right| \le 2\omega(f,\alpha_n)$$

sağlanır. Burada $\alpha_n(x) := \sqrt{\widetilde{K_n^{q_n}}\left(\psi_x^2;x\right)}$ dir.

Lemma 4.3 den her bir $\frac{1}{\sqrt{[3]_q}}\frac{1}{[n]_q} \le x < \frac{1}{1-q^n}$ için,

$$\overline{K_n^q}\left(\psi_x^2;x\right)=2x\left(x-\overline{K_n^q}\left(e_1;q;x\right)\right)$$

$$=2x\left(x+\frac{1}{q[2]_q}\frac{1}{[n]_q}-\frac{2}{[2]_q}\sqrt{\frac{[2]_q^2}{4q^2[n]_q^2}+\frac{[3]_q}{3q}x^2-\frac{1}{3q[n]_q^2}}\right) \tag{4.7}$$

olur.

4.3. Teorem

$\left(q_n\right)$, Eş. 4.5 koşullarını sağlayan bir dizi olsun. $f\in C_B\left[0,\infty\right)$ da azalmayan bir fonksiyon $\frac{1}{\sqrt{[3]_{q_n}}}\frac{1}{[n]_{q_n}}\le x<\frac{1}{1-q_n^n}$ için

$$\left|\overline{K_n^{q_n}}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le 2\omega\left(f,\delta_n^*\right)$$

olur. Burada $\delta_n^*\left(x\right):=\sqrt{\overline{K_n^{q_n}}\left(\psi_x^2;x\right)}$ dir.

Teorem 4.2 ve 4.3 ün ispatı; Teorem 4.1 dekine benzer adımlar izlenerek ve Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 göz önüne alınarak kolayca yapılabilir.

5. RIEMANN TİPLİ $q-$İNTEGRAL İLE $q-$SZASZ-MIRAKJAN-KANTOROVICH OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $q-$Szasz-Mirakjan operatörlerinin Kantorovich tipli modifikasyonu Riemann tipli $q-$integral yardımıyla geliştirilmiş ve oluşturulan operatörlerin ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı elde edilmiştir.

Her pozitif tamsayı n ve $q\in(0,1)$ için,

$$L_n^q(f;x)=[n]_q\, E_q\left(-[n]_q\frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q\, x\right)^k}{[k]_q\, q^k}\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} f(t)\, d_q^R t\,, \tag{5.1}$$

operatörlerini tanımlayalım. Burada $0\le x<\dfrac{q}{1-q^n}$ ve

$$E_q(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2}\frac{x^n}{[n]_q!} \tag{5.2}$$

dir. Riemann tipli $q-$integral tanımından dolayı L_n^q operatörleri pozitif ve lineerdir.

Aşağıdaki lemma ile Eş. 5.1 deki $q-$Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörleri için, bir indirgeme bağıntısı elde edeceğiz.

5.1. Lemma

$e_m(x)=x^m$, $m\ge 0$ olsun. $q\in(0,1)$, $0\le x<\dfrac{q}{1-q^n}$ için

$$L_n^q\left(e_m;x\right)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{\left[n\right]_q^{r-m}}{\left[m-r+1\right]_q}q^{\frac{r(r-1)}{2}}x^r+\sum_{r=2}^{m-1}\sum_{j=1}^{r-1}\binom{m}{r}\frac{\left[n\right]_q^{j-m}q^{r-j}}{\left[m-r+1\right]_q}S_q\left(r,j\right)q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j \quad (5.3)$$

dır. Burada

$$S_q\left(r,j\right)=\frac{1}{\left[j\right]_q!\,q^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum_{i=0}^{j}\left(-1\right)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_q\left[j-i\right]_q^r$$

$$S_q\left(r+1,j\right)=\left[j\right]_q S_q\left(r,j\right)+S_q\left(r,j-1\right)$$
$$S_q\left(0,0\right)=1;\;\; S_q\left(r,0\right)=0,\; r>0;\;\; S_q\left(r,j\right)=0,\; j>r$$

indirgeme bağıntısını sağlayan ikinci çeşit $q-$ Stirling polinomlarıdır.

İspat

$\left[k+1\right]_q-q\left[k\right]_q=1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{q[k]_q/[n]_q}^{[k+1]_q/[n]_q} t^m d_q^R t &= \left(1-q\right)\frac{1}{\left[n\right]_q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{q\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}+\frac{1}{\left[n\right]_q}q^j\right)^m q^j \\
&= \left(1-q\right)\frac{1}{\left[n\right]_q}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{q^r\left[k\right]_q^r}{\left[n\right]_q^r}\frac{1}{\left[n\right]_q^{m-r}}q^{(m-r+1)j} \\
&= \left(1-q\right)\frac{1}{\left[n\right]_q}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{q^r\left[k\right]_q^r}{\left[n\right]_q^r}\frac{1}{\left[n\right]_q^{m-r}}\sum_{j=0}^{\infty}q^{(m-r+1)j} \\
&= \frac{1}{\left[n\right]_q}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{1}{\left[n\right]_q^{m-r}}\frac{1}{\left[m-r+1\right]_q}\frac{q^r\left[k\right]_q^r}{\left[n\right]_q^r}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$L_n^q(e_m;x) = E_q\left(-[n]_q \frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q}\frac{q^r[k]_q^r}{[n]_q^r}$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q}E_q\left(-[n]_q \frac{x}{q}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left([n]_q x\right)^k}{[k]_q!q^k}\frac{q^r[k]_q^r}{[n]_q^r}.$$

yazılabilir.

f fonksiyonunun $j.$ mertebeden $q-$fark operatörü

$$\begin{aligned}\Delta_q^j f_k &= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_q f_{k+j-i} \\ \Delta_q^{j+1} f_k &= \Delta_q^j f_{k+1} - q^j \Delta_q^j f_k\end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada f_k, f in tanım kümesinin belli bir alt aralığına ait x_k noktasındaki değeridir [Phillips, 2003].

Eş. 5.2 ve iki serinin çarpımı için

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

şeklinde verilen Cauchy Kuralını [bkz. Aral, 2008] kullanarak

$$L_n^q(e_m;x) = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{q^r[j-i]_q^r}{[n]_q^r}\frac{\left([n]_q x\right)^j}{q^j[i]_q![j-i]_q!}$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{[n]_q}{q}\right)^j \Delta_q^j t^r(0)\frac{x^j}{[j]_q!}$$

yazılabilir. Burada $x_k = \dfrac{[k]_q\, q}{[n]_q}$ olmak üzere Eş. 5.4 göz önüne alındığında

$$\Delta_q^j t^r(0) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_q \frac{q^r [j-i]_q^r}{[n]_q^r}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\Delta_q^j f(0) = q^{\frac{j(j-1)}{2}} D_q^j f(\xi) \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^j, \ \xi \in \left(0, \frac{q[j]_q}{[n]_q} \right)$$

olduğundan $\Delta_q^j t^r(0) = 0,\ j > r$ ve $\Delta_q^r t^r(0) = q^{\frac{r(r-1)}{2}} [r]_q! \left(\dfrac{q}{[n]_q} \right)^r$ sağlanır. Bunun yardımıyla da

$$\begin{aligned}
L_n^q(e_m; x) &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q} \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{[n]_q}{q} \right)^j \Delta_q^j t_0^r \frac{x^j}{[j]_q!} \\
&= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q} q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r \\
&\quad + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q} \sum_{j=0}^{r-1} \left(\frac{[n]_q}{q} \right)^j \Delta_q^j t_0^r \frac{x^j}{[j]_q!} \\
&= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q} q^{\frac{r(r-1)}{2}} x^r \\
&\quad + \sum_{r=2}^{m} \binom{m}{r} \frac{[n]_q^{r-m}}{[m-r+1]_q} \sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{q}{[n]_q} \right)^{r-j} S_q(r,j) q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j
\end{aligned}$$

yazılabilir ki bu da ispatı tamamlar. Burada

$$S_q(r,j)=\frac{1}{[j]_q!\,q^{\frac{j(j-1)}{2}}}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}_q [j-i]_q^r$$

$$S_q(r+1,j)=[j]_q S_q(r,j)+S_q(r,j-1)$$

indirgeme bağıntısını sağlayan ikinci çeşit $q-$Stirling polinomlarıdır.

5.2. Lemma

L_n^q operatörler dizisi için, $0\le x<\frac{q}{1-q^n}$ olduğunda

i) $L_n^q(e_0;x)=1$,

ii) $L_n^q(e_1;x)=x+\frac{1}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q}$,

iii) $L_n^q(e_2;x)=qx^2+\left(q+\frac{2}{[2]_q}\right)\frac{1}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}$,

iv) $L_n^q(e_3;x)=q^3x^3+\left(q^3+2q^2+\frac{3q}{[2]_q}\right)\frac{1}{[n]_q}x^2+\left(q^2+\frac{3q}{[2]_q}+\frac{3}{[3]_q}\right)\frac{1}{[n]_q^2}x+\frac{1}{[4]_q}\frac{1}{[n]_q^3}$,

v)

$$\begin{aligned} L_n^q(e_4;x)&=q^6x^4+\left(q^6+2q^5+3q^4+\frac{4q^3}{[2]_q}\right)\frac{1}{[n]_q}x^3 \\ &+\left(q^5+3q^4+3q^3+\frac{4\left(q^3+2q^2\right)}{[2]_q}+\frac{6q}{[3]_q}\right)\frac{1}{[n]_q^2}x^2 \\ &+\left(q^3+\frac{4q^2}{[2]_q}+\frac{6q}{[3]_q}+\frac{4}{[4]_q}\right)\frac{1}{[n]_q^3}x+\frac{1}{[5]_q}\frac{1}{[n]_q^4} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

Lemma 5.2 nin ispatı için Eş. 5.3 de $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ alınması yeterlidir.

5.1. Teorem

(q_n), $q_n \in (0,1)$ olmak üzere $st-\lim_n q_n^n = 1$ ve $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0$ koşullarını sağlayan bir dizi olsun. $\lambda > 0$, $0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}$ ve herhangi bir $f \in C_{1+x^2}\ [0,\infty)$ için $st-\lim_n \left\| L_n^{q_n}(f;.) - f \right\|_{1+x^{2+\lambda}} = 0$ dır.

İspat

Lemma 5.1'in bir sonucu olarak, $x \in \left[0, \frac{q_n}{1-q_n^n}\right)$ (burada n yeterince büyük bir sayı) için $\left|L_n^{q_n}(1+t^2;x)\right| \le C\left(1+x^{2+\lambda}\right)$ olduğundan $\left\{L_n^{q_n}(f;.)\right\}$, C_{1+x^2}'den $B_{1+x^{2+\lambda}}$'ye tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisidir. Lemma 5.2 (i) den

$$st-\lim_n \left\| L_n^{q_n}(e_0;.) - e_0 \right\|_{1+x^2} = 0$$

olduğu açıkça görülebilir. Lemma 5.2 (ii) den ise

$$\sup_{0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}} \frac{\left|L_n^{q_n}(e_1;x) - e_1(x)\right|}{1+x^2} = \sup_{0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}} \frac{\left| x + \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}} - x \right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

$$= \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

elde edilir. $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_n}} = 0$ olduğundan $st-\lim_n \left\| L_n^{q_n}(e_1;.) - e_1 \right\|_{1+x^2} = 0$ olur. Benzer olarak, Lemma 5.2 (iii) den

$$\sup_{0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}} \frac{\left| L_n^{q_n}(e_2;x) - e_2(x) \right|}{1+x^2} = \sup_{0 \le x < \frac{q_n}{1-q_n^n}} \frac{\left| q_n x^2 + \left(q_n + \frac{2}{[2]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n]_{q_n}} x + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}^2} - x^2 \right|}{1+x^2}$$

$$\le (1-q_n) + \left(\frac{q_n}{2} + \frac{1}{[2]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n]_{q_n}} + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla da,

$$\left\| L_n^{q_n}(e_2;.) - e_2 \right\|_{1+x^2} \le (1-q_n) + \left(\frac{q_n}{2} + \frac{1}{[2]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n]_{q_n}} + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \tag{5.5}$$

olur.

Şimdi her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$D = \left\{ k : \left\| L_k^{q_k}(e_2;.) - e_2 \right\|_{1+x^2} \ge \varepsilon \right\},$$

$$D_1=\left\{k:\left(1-q_k\right)\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

$$D_2=\left\{k:\left(\frac{q_k}{2}+\frac{1}{[2]_{q_k}}\right)\frac{1}{[n]_{q_k}}\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

$$D_3=\left\{k:\left(\frac{1}{[3]_{q_k}}\frac{1}{[n]_{q_k}^2}\right)\geq\frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Eş. 5.5 den, $D\subseteq D_1\bigcup D_2\bigcup D_3$ olduğu açıktır ve bu durum her $k\in N$ için

$$\delta\left(\left\{n\leq n_0:\left\|L_n^{q_n}\left(e_2;.\right)-e_2\right\|_{1+x^2}\geq\varepsilon\right\}\right)=\delta\left(D\right)\leq\delta\left(D_1\right)+\delta\left(D_2\right)+\delta\left(D_3\right)$$

olmasını gerektirir.

$st-\lim_n q_n^n=1$ ve $st-\lim_n\frac{1}{[n]_{q_n}}=0$ olduğundan $st-\lim_n\left(1-q_n\right)=0$, $st-\lim_n\left(\frac{q_n}{2}+\frac{1}{[2]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n]_{q_n}}=0$ ve $st-\lim_n\left(\frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n]_{q_n}^2}\right)=0$ sağlanır. Diğer yandan istatistiksel yakınsaklık tanımından

$$\delta\left(D_1\right)+\delta\left(D_2\right)+\delta\left(D_3\right)=0$$

olduğu görülür ve böylece $st-\lim_n\left\|L_n^{q_n}\left(e_2;.\right)-e_2\right\|_{1+x^2}=0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Uyarı

$q_n = \begin{cases} 1-\dfrac{e^{-n}}{n}, & k \neq m^2 \\ 0, & k = m^2 \end{cases}$ $\left(m = 1,2,3,...\right)$ şeklinde seçilen bir dizi Teorem 5.1 deki koşulları sağlar. Fakat klasik anlamda yakınsak değildir.

5.1. İstatistiksel Yaklaşım Hızı

Sınırlı olmayan fonksiyonlara operatörler dizisinin yaklaşım hızı, Freud (1973)'ün tanımladığı

$$\Omega_\alpha\left(f,\delta\right) = \sup_{x\geq 0,\ 0<h\leq\delta} \frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{N} \tag{5.6}$$

ağırlıklı süreklilik modülü ile hesaplanabilmektedir.

5.3. Lemma (Lopez, 2004)

$f \in C^k_{1+x^\alpha}\ \left[0,\infty\right)$ ise, Eş. 5.6 ile tanımlı süreklilik modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$, δ'nın monoton artan bir fonksiyonudur,

ii) $\lim\limits_{\delta\to 0}\Omega_\alpha\left(f,\delta\right) = 0$ dır,

iii) Herhangi bir $\lambda\in\left[0,\infty\right)$ için, $\Omega_\alpha\left(f,\lambda\delta\right)\leq\left(1+\lambda\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$'dir.

İspat

i) $\delta_1 < \delta_2$ için $0 < h \le \delta_2$ kümesinin eleman sayısı $0 < h \le \delta_1$ kümesinin eleman sayısından daha büyük olduğu açıktır ve küme büyüdükçe bu küme üzerinden alınan supremum da büyüyeceğinden ispat tamamlanır.

ii) $f \in C^k_{1+x^\alpha}\left[0,\infty\right)$ ise $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left|f\left(x\right)\right|}{1+x^\alpha} = k,\ k \in \mathbb{R}$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, x_0 > 0$ reel sayısı vardır ki, $x \ge x_0$ için

$$\left|\frac{f\left(x\right)}{1+x^\alpha} - k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dir.}$$

$x_1 \ge x_0 + \delta$ olacak biçimde sabit bir x_1 sayısı için

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha\left(f,\delta\right) &\le \sup_{0\le x\le x_1,\ 0<h\le\delta}\frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^\alpha} + \sup_{x\ge x_1,\ 0<h\le\delta}\frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^\alpha} \\
&\le \sup_{0\le x\le x_1,\ 0<h\le\delta}\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right| + \sup_{x\ge x_1,\ 0<h\le\delta}\frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^\alpha} \\
&= \omega_{\left[0,x_1\right]}\left(f,\delta\right) + \sup_{x\ge x_1,\ 0<h\le\delta}\frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^\alpha}
\end{aligned}$$

ve $x \ge x_1$ için

$$\left|\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{1+\left(x+h\right)^\alpha}\right| \le \left|\frac{f\left(x+h\right)}{1+\left(x+h\right)^\alpha} - k\right| + \left|\frac{f\left(x\right)}{1+\left(x+h\right)^\alpha} - k\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1+x^{\alpha}}{1+(x+h)^{\alpha}}\left|\frac{f(x)}{1+x^{\alpha}}\right| + |k|\left|1-\frac{1+x^{\alpha}}{1+(x+h)^{\alpha}}\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |k|\left|\frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{1+(x+h)^{\alpha}}\right|$$

$$= \varepsilon + |k|\sum_{i=1}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}\frac{x^{\alpha-i}}{1+(x+h)^{\alpha}}h^{i}$$

$$\leq \varepsilon + |k|\,\delta\sum_{i=1}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}\delta^{i-1}$$

dir. Böylelikle

$$\Omega_{\alpha}(f,\delta) \leq \text{maks}\left\{\omega_{[0,x_1]}(f,\delta), \varepsilon + |k|\,\delta\sum_{i=1}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}\delta^{i-1}\right\}$$

elde edilir. $[0,x_1]$ kapalı aralığında f fonksiyonu sürekli olduğundan $\delta \to 0$ iken $\omega_{[0,x_1]}(f,\delta) \to 0$ ve böylece de $\lim\limits_{\delta\to 0}\Omega_{\alpha}(f,\delta) \leq \varepsilon$ olur. ε keyfi küçük bir sayı olduğundan ispat tamamlanır.

iii) Ağırlıklı süreklilik modülünün tanımdan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_{\alpha}(f,m\delta) = \sup_{x,t\geq 0,\ |x-t|\leq m\delta}\frac{|f(t)-f(x)|}{1+t^{\alpha}}$$

yazılabilir.

$$|t-x| \leq m\delta \Rightarrow x - m\delta \leq t \leq x + m\delta$$

olup, $t = x + mh$ seçimiyle $|h| \leq \delta$ ve

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha\left(f, m\delta\right) &= \sup_{x\geq 0,\ h\leq\delta} \frac{\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+mh\right)^\alpha} \\
&\leq \sup_{x\geq 0,\ h\leq\delta} \frac{\left|f\left(x+mh\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+mh\right)^\alpha} \\
&= \sup_{x\geq 0,\ h\leq\delta} \frac{1}{1+\left(x+mh\right)^\alpha}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{x\geq 0,\ h\leq\delta} \frac{1}{1+\left(x+\left(k+1\right)h\right)^\alpha}\left|f\left(x+\left(k+1\right)h\right)-f\left(x+kh\right)\right| \\
&= m\Omega_\alpha\left(f,\delta\right) \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

olur. Böylelikle de

$$\Omega_\alpha\left(f, m\delta\right) \leq m\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$$

elde edilir.

Herhangi bir $\lambda \in \left[0,\infty\right)$ sayısının tam kısmını $[\![\lambda]\!]$ ile gösterilirse

$$[\![\lambda]\!] \leq \lambda \leq [\![\lambda]\!]+1$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu eşitsizliklerin ve Lemma 5.3 ün (ii) özelliğinde ki $\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$ nın artan fonksiyon olması kullanılırsa

$$\Omega_\alpha\left(f, \lambda\delta\right) \leq \Omega_\alpha\left(f, \left([\![\lambda]\!]+1\right)\delta\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\![\lambda]\!]$ pozitif bir tam sayı olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafına Eş. 5.7 uygulanırsa

$$\Omega_\alpha\left(f,\left(\llbracket\lambda\rrbracket+1\right)\delta\right)\leq\left(\llbracket\lambda\rrbracket+1\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için

$$\llbracket\lambda\rrbracket+1<\lambda+1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\Omega_\alpha\left(f,\left(\llbracket\lambda\rrbracket+1\right)\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$$

eşitsizliği geçerli olur. Sonuç olarak

$$\Omega_\alpha\left(f,\lambda\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$$

yazılır ki, bu da ispatı tamamlar.

$$\Omega_\alpha\left(f,\lambda\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right)$$

eşitsizliğinde $\lambda=\dfrac{|t-x|}{\delta}$ alınırsa

$$\Omega_\alpha\left(f,|t-x|\right)\leq\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\Omega_\alpha\left(f,\delta\right) \tag{5.8}$$

elde edilir.

$$\Omega_\alpha\left(f,|t-x|\right)=\sup_{x,t\geq0,\ |t-x|\leq|t-x|}\frac{\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|}{1+t^\alpha}$$

ifadesi yardımıyla ise

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left(1+\left(x+\left|t-x\right|\right)^{\alpha}\right)\Omega_{\alpha}\left(f,\left|t-x\right|\right)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağ tarafına Eş. 5.8 uygulanırsa

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left(1+\left(x+\left|t-x\right|\right)^{\alpha}\right)\left(\frac{\left|t-x\right|}{\delta}+1\right)\Omega_{\alpha}\left(f,\delta\right)$$

elde edilir.

$$\left(1+\left(x+\left|t-x\right|\right)^{\alpha}\right)\leq\left(1+\left(2x+t\right)^{\alpha}\right)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left(1+\left(2x+t\right)^{\alpha}\right)\left(1+\frac{\left|t-x\right|}{\delta}\right)\Omega_{\alpha}\left(f,\delta\right) \tag{5.9}$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile f fonksiyonuna $\left\{L_n^{q_n}\left(f;.\right)\right\}$ dizisinin yaklaşım hızını elde edilmesi amaçlanmaktadır.

5.2. Teorem

Her pozitif tamsayı n ve $q\in\left(0,1\right)$, $f\in C_{1+x^2}^{0}\left[0,\infty\right)$ için

$$\left\|L_n^{q}\left(f;.\right)-f\right\|_{1+x^3}\leq K\Omega_2\left(f,\delta\right)$$

olur. Burada, $0 \le x < \dfrac{q}{1-q^n}$, $\delta = \text{maks}\left\{ \sqrt{\dfrac{q}{[n]_q}}, \dfrac{1}{\sqrt{[3]_q}} \dfrac{1}{[n]_q} \right\}$ ve K, f den bağımsız pozitif sabittir.

İspat

Eş. 5.9 da $\alpha = 2$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(1+(2x+t)^2\right)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\Omega_2(f,\delta)$$

$$:= \mu_x(t)\left(1+\frac{1}{\delta}\psi_x(t)\right)\Omega_2(f,\delta)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left|L_n^q(f;x)-f(x)\right| \le \left(L_n^q(\mu_x;x)+\frac{1}{\delta_n}L_n^q(\mu_x\psi_x;x)\right)\Omega_2(f,\delta)$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left|L_n^q(f;x)-f(x)\right| \le \left(L_n^q(\mu_x;x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{L_n^q(\mu_x^2;x)}\sqrt{L_n^q(\psi_x^2;x)}\right)\Omega_2(f,\delta) \tag{5.10}$$

elde edilir. Lemma 5.1 den

$$L_n^q(\mu_x;x) \le K_1\left(1+x^2\right)$$

$$\sqrt{L_n^q(\mu_x^2;x)} \le K_2\left(1+x^2\right)$$

olacak şekilde bir K_1 ve K_2 pozitif sabitleri vardır.

Ayrıca,

$$L_n^q\left(\psi_x^2;x\right)=\left(q-1\right)x^2+\frac{q}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}$$

$$\leq\frac{q}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eş. 5.10 dan

$$\left|L_n^q\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(1+x^2\right)\left(K_1+\frac{1}{\delta}K_2\sqrt{\frac{q}{[n]_q}x+\frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2}}\right)\Omega_2\left(f,\delta\right)$$

elde edilir. $\delta=\text{maks}\left\{\sqrt{\frac{q}{[n]_q}},\frac{1}{\sqrt{[3]_q}}\frac{1}{[n]_q}\right\}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x}&\leq\left(1+x^2\right)\left(1+x\right)\\&\leq2\left(1+x^3\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\left|L_n^q\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left(1+x^3\right)\left(K_1+2K_2\right)\Omega_2\left(f,\delta\right)$$

elde edilir. $K=K_1+2K_2$ seçildiğinde istenilen sonuca ulaşılmış olur.

Uyarı

Teorem 5.2 de $st-\lim_n q_n^n=1$ ve $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_n}}=0$ koşullarını sağlayan bir $q=(q_n)$ dizisi alınırsa $L_n^{q_n}$ operatörler dizisinin istatistiksel yaklaşım hızı elde edilir.

5.2. İki Değişkenli q – Szasz-Mirakjan-Kantorovich Operatörleri

Bu kısımda Eş. 5.1 ile tanımlanan operatörlerin iki değişkenli genelleşmesinin oluşturulması amaçlanmaktadır.

$n\in\mathbb{N}$, $0<q_1,q_2<1$, $0\le x<\frac{q_1}{1-q_1^n}$ ve $0\le y<\frac{q_2}{1-q_2^n}$ için, $L_n^q(f;x)$ operatörlerinin iki değişkenli genelleşmesini

$$\begin{aligned}
L_n^{q_1,q_2}(f;x,y) &= [n]_{q_1}[n]_{q_2}E_{q_1}\left(-[n]_{q_1}\frac{x}{q_1}\right)E_{q_2}\left(-[n]_{q_2}\frac{y}{q_2}\right)\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left([n]_{q_1}x\right)^k}{[k]_{q_1}!q_1^k}\frac{\left([n]_{q_2}y\right)^j}{[j]_{q_2}!q_2^j}\\
&\times\int_{q_2[j]_{q_2}/[n]_{q_2}}^{[j+1]_{q_2}/[n]_{q_2}}\int_{q_1[k]_{q_1}/[n]_{q_1}}^{[k+1]_{q_1}/[n]_{q_1}} f(t,s)d_{q_2}^R s d_{q_1}^R t
\end{aligned}\tag{5.11}$$

olarak tanımlayalım. Burada $q-$ integral;

$$\begin{aligned}
\int_a^b\int_c^d f(t,s)d_{q_2}^R s d_{q_1}^R t &= (1-q_1)(1-q_2)(b-a)(c-d)\\
&\times\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f\left(a+(b-a)q_1{}^i,c+(c-d)q_2{}^j\right)q_2{}^j q_1{}^i
\end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Eş. 5.11 $L_n^{q_1,q_2}\left(f;x,y\right)$ operatörlerinin lineer ve pozitif olduğu görülmektedir.

$L_n^{q_1,q_2}\left(f;x,y\right)$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini inceleyebilmek için gerekli olan lemma aşağıda verilmiştir.

5.4. Lemma

$\left(i,j\right)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ ve $i+j\leq 2$ olmak üzere, $e_{ij}=x^i y^j$ iki boyutlu test fonksiyonları olsunlar. Eş. 5.11 ile verilen operatörler için,

i) $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{00};x,y\right)=1$,

ii) $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{10};x,y\right)=x+\dfrac{1}{[2]_{q_1}}\dfrac{1}{[n]_{q_1}}$,

iii) $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{01};x,y\right)=y+\dfrac{1}{[2]_{q_2}}\dfrac{1}{[n]_{q_2}}$,

iv) $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{20};x,y\right)=q_1x^2+\left(q_1+\dfrac{2}{[2]_{q_1}}\right)\dfrac{1}{[n]_{q_1}}x+\dfrac{1}{[3]_{q_1}}\dfrac{1}{[n]_{q_1}}$,

v) $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{02};x,y\right)=q_2y^2+\left(q_2+\dfrac{2}{[2]_{q_2}}\right)\dfrac{1}{[n]_{q_2}}y+\dfrac{1}{[3]_{q_2}}\dfrac{1}{[n]_{q_2}}$

eşitlikleri doğrudur.

İspat

$q-$ integral tanımından dolayı

$$\int_{q_1[k]_{q_1}/[n]_{q_1}}^{[k+1]_{q_1}/[n]_{q_1}} \int_{q_2[j]_{q_2}/[n]_{q_2}}^{[j+1]_{q_2}/[n]_{q_2}} d_{q_2}^R s d_{q_1}^R t = \left(\frac{[k+1]_{q_1}}{[n]_{q_1}} - \frac{q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}} \right) \left(\frac{[j+1]_{q_2}}{[n]_{q_2}} - \frac{q_2[j]_{q_2}}{[n]_{q_2}} \right)$$

$$= \frac{1}{[n]_{q_1}[n]_{q_2}}$$

elde edilir. Buradan $L_n^{q_1,q_2}(e_{00};x,y)=1$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\int_{q_1[k]_{q_1}/[n]_{q_1}}^{[k+1]_{q_1}/[n]_{q_1}} \int_{q_2[j]_{q_2}/[n]_{q_2}}^{[j+1]_{q_2}/[n]_{q_2}} t d_{q_2}^R s d_{q_1}^R t = (1-q_1)(1-q_2)\frac{1}{[n]_{q_1}[n]_{q_2}}$$

$$\times \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}} + \frac{1}{[n]_{q_1}} q_1^{\,i} \right) q_2^{\,j} q_1^{\,i}$$

$$= \frac{1}{[n]_{q_2}} \left(\frac{q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}^2} + \frac{1}{[n]_{q_1}^2}\frac{1}{1+q_1} \right)$$

ifadesi kullanılarak

$$L_n^{q_1,q_2}(e_{10};x,y) = E_{q_1}\left(-[n]_{q_1}\frac{x}{q_1} \right) E_{q_2}\left(-[n]_{q_2}\frac{y}{q_2} \right)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}} + \frac{1}{[2]_{q_1}}\frac{1}{[n]_{q_1}} \right) \frac{\left([n]_{q_1}x\right)^k}{[k]_{q_1}!\,q_1^k}\frac{\left([n]_{q_2}y\right)^j}{[j]_{q_2}!\,q_2^j}$$

$$= x + \frac{1}{[2]_{q_1}}\frac{1}{[n]_{q_1}}$$

elde edilir. Benzer olarak $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{01};x,y\right)=y+\frac{1}{[2]_{q_2}}\frac{1}{[n]_{q_2}}$ eşitliği de sağlanır.

$$\int_{q_1[k]_{q_1}/[n]_{q_1}}^{[k+1]_{q_1}/[n]_{q_1}}\int_{q_2[j]_{q_2}/[n]_{q_2}}^{[j+1]_{q_2}/[n]_{q_2}} t^2 d_{q_2}^R s d_{q_1}^R t=\frac{1}{[n]_{q_2}}\left(\frac{q_1^2[k]_{q_1}^2}{[n]_{q_1}^3}+\frac{2q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}^3}\frac{1}{[2]_{q_1}}+\frac{1}{[n]_{q_1}^3}\frac{1}{[3]_{q_1}}\right)$$

ifadesi kullanılarak

$$L_n^{q_1,q_2}\left(e_{20};x,y\right)=E_{q_1}\left(-[n]_{q_1}\frac{x}{q_1}\right)E_{q_2}\left(-[n]_{q_2}\frac{y}{q_2}\right)$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{q_1^2[k]_{q_1}^2}{[n]_{q_1}^2}+\frac{2q_1[k]_{q_1}}{[n]_{q_1}^2}\frac{1}{[2]_{q_1}}+\frac{1}{[n]_{q_1}^2}\frac{1}{[3]_{q_1}}\right)\frac{\left([n]_{q_1}x\right)^k}{[k]_{q_1}!q_1^k}\frac{\left([n]_{q_2}y\right)^j}{[j]_{q_2}!q_2^j}$$
$$=q_1x^2+\frac{q_1}{[n]_{q_1}}x+\frac{2}{[2]_{q_1}}\frac{1}{[n]_{q_1}}x+\frac{1}{[3]_{q_1}}\frac{1}{[n]_{q_1}^2}$$

elde edilir. Benzer olarak $L_n^{q_1,q_2}\left(e_{02};x,y\right)=q_2y^2+\left(q_2+\frac{2}{[2]_{q_2}}\right)\frac{1}{[n]_{q_2}}y+\frac{1}{[3]_{q_2}}\frac{1}{[n]_{q_2}}$

eşitliği de sağlanır ki bu da ispatı tamamlar.

İki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipli bir teorem Volkov (1957) tarafından verilmiştir. Erkuş ve Duman (2000) ise istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanarak çok değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipli teorem vermişlerdir.

Gadjiev (1980) ise çok değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı yaklaşımlar üzerine teorem vermiştir.

B_w, $\left|f\left(x,y\right)\right|\leq M_f w\left(x,y\right)$ sınırlılık koşularını sağlayan ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı bir reel değerli fonksiyonlar uzayı olsun. $w\left(x,y\right)$, $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli ve

$\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} w(x,y)=\infty$ olan bir fonksiyon ise, her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $w(x,y)\geq 1$ bir ağırlık fonksiyonu olarak isimlendirilir. B_w üzerindeki

$$\|f\|_w = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \frac{|f(x,y)|}{w(x,y)}$$

normlu tüm sürekli fonksiyonların uzayını C_w ile gösterilsin.

5.3. Teorem (Gadjiev, 1980)

$w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$, $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{w_1(x,y)}{w_2(x,y)}=0$ koşullarını sağlayan ağırlık fonksiyonları ve T_n 'in C_{w_1} 'den B_{w_2} 'ye tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Her $f\in C_{w_1}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n F_\nu - F_\nu\|_{w_1}=0\text{, } (\nu=0,\ 1,\ 2)$$

ise

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n f - f\|_{w_2}=0$$

olur. Burada, $F_0(x,y)=\frac{w_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$, $F_1(x,y)=\frac{x\, w_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$, $F_2(x,y)=\frac{y\, w_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$, $F_3(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\, w_1(x,y)}{1+x^2+y^2}$ 'dır.

$\mathbb{R}_0^2=\{(x,y)\in R^2 : x\geq 0, y\geq 0\}$ olmak üzere $\lambda>0$ ve $(x,y)\in\mathbb{R}_0^2$ için $w_1(x,y)=1+x^2+y^2$ ve $w_2(x,y)=(1+x^2+y^2)^{1+\lambda}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

q_1 ve q_2, $0 < q_{1,n} < 1$ ve $0 < q_{2,n} < 1$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} st-\lim\limits_n q_{1,n}^n = 1 \text{ ve } st-\lim\limits_n \dfrac{1}{[n]_{q_{1,n}}} = 0 \\ st-\lim\limits_n q_{2,n}^n = 1 \text{ ve } st-\lim\limits_n \dfrac{1}{[n]_{q_{2,n}}} = 0 \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

şeklinde seçersek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.4. Teorem

$(q_{1,n})$ ve $(q_{2,n})$ Eş. 5.12 koşulları sağlayan diziler olsun. $\lambda > 0$, $0 \le x < \dfrac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n}$ ve $0 \le y < \dfrac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}$ olmak üzere, her hangi bir $f \in C_{1+x^2+y^2}\left(\mathbb{R}_0^2\right)$ için $st-\lim\limits_n \left\| L_n^{q_1,q_2} f - f \right\|_{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\lambda}} = 0$ olur.

İspat

Lemma 5.4 den, $x \in \left[0, \dfrac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n}\right)$ ve $y \in \left[0, \dfrac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}\right)$ için $\left|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(1+t^2+s^2;x,y\right)\right| \le C\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\lambda}$ dir. Dolayısıyla $\left\{L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}(f;.)\right\}$, $C_{1+x^2+y^2}$ 'den $B_{\left(1+x^2+y^2\right)^{1+\lambda}}$ 'ya tanımlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisidir.

Lemma 5.4 (i) eşitliğinden

$$st-\lim_n \left\| L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{00};.\right) - e_{00} \right\|_{1+x^2+y^2} = 0$$

olduğu açıkça görülebilir. Lemma 5.4 (ii) eşitliğinden

$$\sup_{0\le x<\frac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n},0\le y<\frac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}} \frac{\left|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{10};.\right)-e_{10}\right|}{1+x^2+y^2}=\sup_{0\le x<\frac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n},0\le y<\frac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}} \frac{\left|x+\frac{1}{[2]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}-x\right|}{1+x^2+y^2}$$

$$=\sup_{0\le x<\frac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n},0\le y<\frac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\frac{1}{[2]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}$$

$$=\frac{1}{[2]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}$$

elde edilir. $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}=0$ olduğundan, $st-\lim_n \left\|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{10};.\right)-e_{10}\right\|_{1+x^2+y^2}=0$ olur.

Ayrıca, $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_{2,n}}}=0$ olduğundan, $st-\lim_n \left\|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{01};.\right)-e_{01}\right\|_{1+x^2+y^2}=0$ olur.

Benzer olarak, Lemma 5.4 (iv) eşitliğinden dolayı da

$$\sup_{0\le x<\frac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n},0\le y<\frac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}} \frac{\left|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{20};.\right)-e_{20}\right|}{1+x^2+y^2}$$

$$=\sup_{0\le x<\frac{q_{1,n}}{1-q_{1,n}^n},0\le y<\frac{q_{2,n}}{1-q_{2,n}^n}} \frac{\left|q_{1,n}x^2+\left(q_{1,n}+\frac{2}{[2]_{q_{1,n}}}\right)\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}x+\frac{1}{[3]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}^2}-x^2\right|}{1+x^2+y^2}$$

$$\le\left(1-q_{1,n}\right)+\left(\frac{q_{1,n}}{2}+\frac{1}{[2]_{q_{1,n}}}\right)\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}+\frac{1}{[3]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}^2}.$$

elde edilir. Buradan $st-\lim_n q_{1,n}^n=1$ ve $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}=0$ olduğundan,

$$st-\lim_n\left(1-q_{1,n}\right)=st-\lim_n\left(\frac{q_{1,n}}{2}+\frac{1}{[2]_{q_{1,n}}}\right)\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}}=st-\lim_n\left(\frac{1}{[3]_{q_{1,n}}}\frac{1}{[n]_{q_{1,n}}^2}\right)=0$$ sağlanır.

Buradan, $st-\lim_n\left\|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{20};.\right)-e_{20}\right\|_{1+x^2+y^2}=0$ elde edilir.

Benzer olarak, $st-\lim_n q_{2,n}^n=1$ ve $st-\lim_n \frac{1}{[n]_{q_{2,n}}}=0$ olduğundan,

$st-\lim_n\left\|L_n^{q_{1,n},q_{2,n}}\left(e_{02};.\right)-e_{02}\right\|_{1+x^2+y^2}=0$ yazılabilir ki bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Agratini, O., Linear Operators That Preserve Some Test Functions, ***Int. J. Math. Sci. Art.***, 94136 1-11 (2006).

Agratini, O., Doğru, O., “Weighted Statistical Approximation by $q-$Szasz Type Operators That Preserve Some Test Functions” **Taiwan. J. Math**., 14(4): 1283-1296 (2010).

Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications”', ***de Gruyter Stud. Math.***, 17, Walter de Gruyter , Berlin, New York 141-265, (1994).

Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., Special Functions, ***Cambridge Univ. Press***, 481-542, (1999).

Aral, A., Gupta, V., “The $q-$derivative and Application to $q-$Szasz–Mirakyan Operators”, ***Calcolo***, 43: 151-170 (2006).

Aral, A., “A Generalization of Szasz–Mirakyan Operators Based on $q-$integers”, ***Math. Comput. Modelling***, 47: 1052–1062 (2008).

Bernstein, S.N., “Démonstration du Théorem de Weierstrass Fondée sur le Calculu des Probabilités”, ***Comp. Comm. Soc. Mat. Charkow Sér.***, 13(2): 1-2 (1912).

Bohman, H., “On Approximation of Continuous and Analytic Functions”, ***Arkiffür Math***., 2(3): 43-56 (1951).

Connor, J., “The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences”, ***Analysis***, 8: 47-63 (1988).

Dalmanoğlu, Ö., Doğru O., “Statistical Approximation Properties of Kantorovich type $q-$MKZ operators”, ***Creat. Math. Inform***., 19: 15-24 (2010).

Derriennic, M.M., “Sur l’approximation de Functions Intégrables sur [0,1] par des Polynomes de Bernstein Modifies”, ***J. Approx. Theory***, 31: 325-343 (1981).

Derriennic, M.M., “Modified Bernstein Polynomials and Jacobi Polynomials in $q-$calculus”, ***Arxiv Math***., 0410206 (2): 1-24 (2004).

Doğru, O., Duman, O., “Statistical Approximation of Meyer-König and Zeller operators Based on The q-integers”, ***Publ. Math. Debrecen***, 68: 199-214 (2006).

Doğru, O., Örkcü, M., “King-Type Modification of Meyer-König and Zeller Operators Based on $q-$integers”, ***Math. Comput. Modelling***, 50:7-8 1245-1251 (2009).

Doğru, O., Örkcü, M., “Statistical Approximation by a Modification of $q-$Meyer-König and Zeller Operators”, ***Appl. Math. Lett.***, 23:3 261-266 (2010).

Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C., “ A-statistical convergence of approximating operators”, ***Math. Ineq. Appl.***, 6 689-699 (2003).

Duman, O., Orhan C., “Statistical Approximation by Positive Linear Operators”, ***Studia Math***., 161(2): 187-197 (2004).

Duman, O., Orhan, C., “Rates of $A-$Statistical Convergence of Positive Linear Operators”, ***Appl. Math. Lett.***, 18: 1339-1344 (2005).

Duman, O., Özarslan M.A., “Szasz-Mirakyan Type Operators Providing a Beter Error Estimation”, ***Appl. Math. Lett.***, 20: 1184-1188 (2007).

Duman, O., Özarslan M.A., Della Vechia B., “Modified Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operators Preserving Linear Functios”, ***Turkish J. Math***., 33: 151-158 (2009).

Durrmeyer, J.L., “Une Formule D’inversion de la Transformeé de Laplace: Applications a la Theorie des Moments”, ***Thése de 3e cycle, Facultié des Sciences de l.Université de Paris***, (1967).

Erkuş, E., Duman O., A Korovkin Type Approximation Theorem in Statistical Sense, ***Studia Sci. Math. Hungar***., 43(3): 285-294 (2000).

Fast, H., “Sur la Convergence Statistique”, ***Collog. Math***., 2: 241-244 (1951).

Freud, G., “Investigations on Weighted Approximation by Polynomials”, ***Studia Sci. Math. Hungar.***, 8: 285-305 (1973).

Fridy, J.A., “On Statistical Convergence”, ***Analysis***, 5: 301-313 (1985).

Gadjiev, A.D., "The Convergence Problem for A Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets, And Theorems Analogous To That of P.P. Korovkin", ***Soviet Math. Dokl.,*** 15(5): 1433-1436 (1974).

Gadjiev, A.D., "Positive Linear Operators in Weighted Spaces of Functions of Several Variables", ***Izv. Akad. Nauk. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Math. Nauk,*** 4: 32-37 (1980).

Gadjiev, A.D., Orhan, C., "Some Approximation Theorems via Statistical Convergence", ***Rocky Mountain J. Math.***, 32 (1): 129-138 (2002).

Gasper G. , Rahman M. , "Basic Hypergeometric Series", ***Cambridge Univ. Press***, 5-30, (1990).

Gauchman, H., "Integral Inequalities in Calculus", ***Comput. Math. Appl.***, 47: 281-300 (2004).

Gupta, V., "Some Approximation Properties of $q-$Durrmeyer operators", ***Appl. Math. Comput.,*** 172-178 (2007).

Gupta, V., Radu C., "Statistical Approximation Properties of $q-$Baskokov-Kantorovich Operators", ***Cent. Eur. J. Math***., 7(4): 809-818 (2009).

Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H.,. "Lineer Pozitif Operatör Dizlerinin Yakınsaklığı", ***Ankara Üniv. Yayın.,*** Ankara, 17-63, (1995).

İspir N., On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces, ***Turk J. Math***., 25: 355-365 (2001).

Jackson, F.H., "On the $q-$definite Integrals", ***Quart. J. Math.,*** 41: 193-203 (1910).

Kac, V., Cheung, P., "Quantum Calculus", ***Universitext. Springer-Verlag***, New York, 1-85, (2002).

Kantorovich, L.V., "Sur Certains Developpements Suivant les Polynomesde la Forme de S. Bernstein", ***I, II, C.R. Acad. USSR,*** 563-568, 595-600 (1930).

King, J.P., "Positive Linear Operators Which Preserve x^2 , ***Acta Math. Hungar.***", 99: 203-208 (2003).

Korovkin, P.P., “On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions”, ***Dokl. Akad. Nauk*,** 90: 961-964 (1953).

Lopez-Moreno, A.J., “Weighted Simultaneous Approximation with Baskakov Type Operators”, ***Acta Math. Hungar*,** 104 (1-2): 143-151 (2004).

Lupaş, A., “A $q-$analogue of the Bernstein operator”, ***University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus***, 9 (1987).

Mahmudov, N.I., “On q-parametric Szász-Mirakjan;Operators”, ***Mediterr. J. Math***., 7(3): 297-311 (2010).

Marinkovich, S., Rajkovich, P., Stankovich, M.,. The Inequalities for Some Types of $q-$integrals, ***Comput. Math. Appl***, 56: 2490-2498 (2008).

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H., “An Introduction to the Theory of Numbers”, 5th Ed., ***Wiley***, New York, 10-24, (1980).

Oruç, H., Tuncer N., “On the Convergence and Iterates of $q-$Bernstein Polynomials”, ***J. Approx. Theory*,** 117: 301-313 (2002).

Ostrovska, S., “$q-$Bernstein Polynomials and Their Iterates”, ***J. Approx. Theory***., 123: 232-255 (2003).

Ostrovska, S., “On the Lupaş $q-$analogue of the Bernstein Operator”, ***Rocky Mountain. J. Math.***, 36 (5): 1615-1629 (2006).

Örkcü M., Doğru O., “Weighted Statistical Approximation by Kantorovich Type q-Szasz-Mirakjan Operators”, ***Appl. Math. Comput.***, 217: 7913-7919 (2011).

Örkcü M., Doğru O., “$q-$Szasz-Mirakyan-Kantorovich Type Operators Preserving Some Test Functions”, ***Appl. Math. Lett*.,**.24: 1588-1593 (2011).

Özarslan, M.A., Duman, O., “MKZ type Operators Providing a Better Estimation on [1/2,1)”, ***Canad. Math. Bull.***, 50: 434-439 (2007).

Phillips, G.M., “On Generalized Bernstein Polynomials”, ***D.F. Griffits, G.A. Watson (Eds.), Numerical Analysis World Science***, Singapore, 263-269 (1996).

Phillips, G.M., "Bernstein Polynomials Based on the q-integers", ***Ann. Numer. Math.***, 4: 511-518 (1997).

Phillips, G.M., "A Generalization of the Bernstein Polynomials Based on the $q-$integers", ***Anziam J***., 42: 79-86 (2000).

Phillips, G.M., "Interpolation and Approximation by Polynomials", ***Springer-Verlag***, 247-296, (2003).

Radu, C., "Statistical Approximation Properties of Kantorovich Operator Based on $q-$integers", ***Creat. Math. Inform***., 17(2): 75-84 (2008).

Rajkovich, P.M., Stankovich M.S., Marinkovic, S.D., "Mean Value Theorems in q-Calculus", ***Math. Vesnic***, 54: 171–178 (2002).

Salat, T., "On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers", ***Math. Slovaca***, 30(2): 139-150 (1980).

Stankovic, M.S., Rajkovic, P.M., Marinkovic, S.D., "Inequalities Which Include q–Integrals", ***Bulletin T. CXXXIII de l'Academie serbe des sciences et des arts, Classe des Sciences mathématiques et naturelles, Sciences Mathématiques***, 31: 137–146 (2006).

Szasz, O., "Generalization of S. Bernstein Polynomials to the Infinite Interval" ***J. Res. Nat. Bur. Standards***, 45: 239-245 (1950).

Trif, T., "Meyer-König and Zeller Operators Based on the $q-$integers", ***Rev. Anal. Numer. Theor. Approx***. 29: 221-229 (2000).

Totik, V.,. "Approximation by Szasz–Mirakjan–-Kantorovich operators in $L^p\left(p>1\right)$", ***Analysis Mathematica,*** 9 (2): 147–167 (1983).

Volkov, V.I., "On The Convergence Sequences of Linear Positive Operators In The Space of Continuous Functions of Two Variables", ***(Russian) Dok. Akad. Nauk.,*** 115: 17-19 (1957).

Weierstrass, K., "Über die Aanalytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher Funktionen Einer Reellen Veranderlichen", ***Sitzungsberichte der Akademiezu Berlin***, 633-639, 789-805 (1885).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÖRKCÜ, Mediha
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 25.09.1981 Eskişehir
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (312) 202 10 83
e-mail	: medihaakcay@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Anadolu Üniversitesi /Matematik ABD	2007
Lisans	Anadolu Üniversitesi/ Matematik B.	2004
Lise	Yunus Emre Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2005-	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar ve Bildiriler

1. Doğru, O., **Örkcü, M.**, "King Type Modification of Meyer-König and Zeller Operators Based on the q-integers", ***Mathematical and Computer Modelling***, 50:7-8 1245-1251 (2009).

2. Doğru, O., **Örkcü, M.**, "Statistical Approximation by a Modification of q-Meyer-König and Zeller Operators", ***Applied Mathematics Letters***, 23:3 261-266 (2010).

3. Örkcü M., Doğru O., "Weighted Statistical Approximation By Kantorovich Type $q-$Szasz-Mirakjan Operators", ***Applied Mathematics and Computation***, 217:7913-7919 (2011).

4. Örkcü M., Doğru O., "$q-$Szasz-Mirakyan-Kantorovich Type Operators Preserving Some Test Functions", ***Applied Mathematics Letters*,** 24: 1588-1593 (2011).

5. Doğru, O., **Örkcü, M**,"Szasz-Mirakjan-Kantorovich Operatör Dizisinin $q-$Genelleşmesi", ***V. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu***, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara, 3-4 Haziran 2010.

İlgi Alanları

Yaklaşımlar teorisi, İstatistiksel yakınsaklık