GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

DÜZENLİ ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

Sare YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2014

Sare YILMAZ tarafından hazırlanan "DÜZENLİ ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Aynur ARIKAN

Matematik, Gazi üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ..…………………

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik, Gazi üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Üye : Prof. Dr. A. Bülent EKİN

Matematik, Ankara üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 27/06/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

……………………..…….

Sare YILMAZ

27/6/2014

DÜZENLİ ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Sare YILMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2014

ÖZET

Bu tez çalışmasında D. I.Zaicev 'in "Stably Solvable Groups" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Bu çalışmada çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir altgrupları içeren radikal grupların sınıfında altgruplar için azalan zincir şartının, çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir altgruplar için azalan zincir şartına denk olduğu gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025

Anahtar Kelimeler : Çözülebilir Grup, Radikal Grup, Azalan zincir şartı

Sayfa Adedi : 46

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Aynur ARIKAN

STABLY SOLVABLE GRUOPS

(M. Sc. Thesis)

Sare YILMAZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2014

ABSTRACT

In this thesis the paper written by D.I. Zaicev titled “Stably Solvable Groups” is studied. In this work showed that in the class of radical groups containing solvable subgroups of some class *s*, the descending chain condition for subgroups is equivalent to the descending chain condition for solvable subgroups of class s.

Science Code : 204.1.025

Key Words : Solvable Group, Radical Group, Descending Chain Condition

Page Number : 46

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, faydalı tavsiyelerde bulunan ve kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Doç. Dr. Aynur ARIKAN'a, ayrıca bana desteklerinden dolayı aileme, tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{H \leq G}$	H, *G* nin altgrubu
$\mathbf{H \lhd G}$	H, *G* nin normal altgrubu
$\mathbf{G/H}$	*G* nin H ile bölüm (faktör) grubu
$\mathbf{H \cong K}$	H ile K izomorftur
$\mathbf{|G\!:H|}$	H nin G içindeki indeksi
$< H, K >$	H ve K tarafından üretilen grup
$< x >$	x tarafından üretilen devirli grup
$\mathbf{x^y = y^{-1}xy}$	x in y ile eşleniği
$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x^{-1}x^y}$	x ve y nin komütatörü
$[\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}]$	$< [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2 >$
$\boldsymbol{G' = [G, G]}$	G nin komütatör(derived) altgrubu
$\mathbf{G^{(n)}}$	$[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$
$\mathbf{N_G(H)}$	H nin G içindeki normalleyeni
$\boldsymbol{C_G(H)}$	H nın G içindeki merkezleyeni
$\boldsymbol{Z(G)}$	G grubunun merkezi
$\mathbf{C_{p^\infty}}$	Quasidevirli grup
H* char *G	H, *G* nin karakteristik altgrubu
$\mathbf{Z_i}(\boldsymbol{G})$	*G* grubunun i. merkezi
Aut(G)	G nin bütün otomorfizmalar kümesi
End(G)	G nin bütün endemorfizmalar kümesi

1. GİRİŞ

Sonsuz grupları çalışırken, doğal olarak bir grubun hangi şartlar altında sonsuz öz altgruplara sahip olma problemi ya da denk olarak her öz altgrubu sonlu olan sonsuz bir grupların (Schimidt's problemi) inşa edilmesi sorusu ortaya çıkar. Belli kısıtlamalar altında bu problem S. N. Chernikov, B. I. Plotkin, M. I. Kargapolov, V. P. Sunkov tarafından çözülmüştür. Aynı zamanda V. P. Sunkov bazı ek şartları altında sonsuz grupların, sonsuz abeliyan altgruplara sahip olma problemini tamamen çözmüştür.

S. N. Cernikov verilen bazı çözülebilirlik uzunluğundan sonsuz çözülebilir öz altgruba sahip olan çözülebilir ve genelleştirilmiş çözülebilir grupların varlığı için benzer problemi çözmüştür. D. I. Zaicev [7] deki çalışmasında düzenli çözülebilir olarak adlandırılan kısmi özellik ile sonsuz çözülebilir altgrupların varlığı için daha genel olarak problem göz önüne alınmıştır.

Çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz çözülebilir bir grubun, eğer çözülebilirlik uzunluğu s olan her sonsuz çözülebilir altgrubunun yine aynı uzunlukta çözülebilir sonsuz bir öz altgrubu varsa bu gruba düzenli çözülebilir grup denir. Böylece eğer bir grup çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrup içeriyorsa bu grup “ yeteri kadar çok” çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz altgrubu içerir. Teorem 5.1. de görüldüğü üzere bir sonsuz radikal grup, (Faktörleri lokal nilpotent olan bir artan seriye sahipse gruba radikal grup denir.) eğer çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrup içeriyorsa o zaman bu grup Chernikov olamaz ya da diğer bir deyişle bu grubun altgruplarının sonsuz bir azalan zinciri vardır. Böylece özel olarak bir radikal grup çözülebilirlik uzunluğu s olan altgruplar içerirse o zaman altgruplar için minimal şartı ile çözülebilirlik uzunluğu s olan altgruplar için azalan zincir şartı denktir. Bilindiği gibi eğer bir grubun çözülebilirlik uzunluğu 1 ise o zaman bu grup abeliyandır. Böylece bu çalışmada aynı zamanda abeliyan altgruplar için minimal şartının genelleştirilmesinin de göz önüne alındığını söyleyebiliriz.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş ve ikinci bölüm de gerekli tanımlar ve sonuçları tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde çeşitli yardımcı önermeler verilmiştir. Dördüncü bölümde çözülebilir gruplarda çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgruplarının olması için şartlar belirlenmiştir. Teorem 4.2. den çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz bir grupta çözülebilirlik uzunluğu s olan bir öz altgrubun varlığından bağımsız olarak sonuç ispatlanmıştır. Teorem 5.1. in ispatına dayanan beşinci bölüm dördüncü bölümde verilen radikal gruplarda sonucunun önemli bir genellemesi yapılmıştır.

2. BAZI HAZIRLIK TANIM VE SONUÇLARI

2.1.Tanım

G bir grup ve $x,y\in G$ olsun. $x^y=y^{-1}xy$ elemanına *x* in *y* ile eşleniği (konjugesi) denir. *X* ve *Y*, *G* nin boştan farklı altkümesi olsun. *G* nin *X* in *Y* ile eşleniği olan altgrubu
$X^Y=\langle x^y : x\in X, y\in Y\rangle$
olarak tanımlanır.

2.2.Tanım

G bir grup ve $N\leq G$ olsun. Her $g\in G$ ve $n\in N$ için $g^{-1}ng\in N$ ise o zaman *N* ye *G* nin bir normal altgrubu denir ve $N\lhd G$ şeklinde gösterilir.

2.3.Tanım

A boştan farklı bir küme olsun. A üzerinde tanımlı bire bir ve örten bir fonksiyona A üzerinde bir permütasyon denir.

2.4.Tanım

$I_n=\{1,2,\ldots,n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bütün permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n, bileşke işlemine göre bir gruptur ve S_n e simetrik grup denir. S_n nin çift permütasyonlarının kümesi A_n ile gösterilir.

2.5.Teorem

$n\geq 2$ olsun. O zaman A_n, S_n nin mertebesi $\frac{1}{2}$ n! olan bir altgrubudur.[7]

2.6. Tanım

G bir grup ve $G\neq 1$ olsun. Eğer G nin 1 ve G den başka normal altgrubu yoksa G ye bir basit grup denir.

2.7. Teorem

$n \geq 5$ için A_n basit gruptur.[7]

2.8.Tanım

Ꞓ grupların bir sınıfı olsun. Eğer her $x \in G$ olmak üzere $1 \neq x \in N_x$ ve $G/N_x \in$ Ꞓ olacak şekilde G nin bir normal N_x altgrubu varsa G ye residually Ꞓ-grup denir. Bu şartlar altında

$$\bigcap_{1 \neq x \in G} N_x = 1$$

dir.

2.9.Tanım

G bir grup *ve* $x_1, x_2, \ldots$ *G* nin elemanları olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1^{x_2}$$

elemanına x_1 ve x_2 nin komütatörü denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ ağırlıklı bir basit komütatör, ardıl olarak

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[x_1] = x_1$ olarak kabul edilir. $x, y \in G$ için $[x, \underbrace{y, \ldots y}_{n}]$ komütatörü $[x,_n y]$ ile gösterilir.

$X_1, X_2, \ldots$ *G* grubunun boştan farklı altkümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \,;\, x_1 \in X_1 \text{ ve } x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Burada $X_1 = X_2 = G$ ise $[G,G]$ komütatör grubuna *G* nin komütatör (derived) altgrubu denir ve G' ile gösterilir. Daha genel olarak $n \geq 2$ için

$$[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n] \text{ ve } [X_1] = \langle X_1 \rangle$$

dir.

2.10.Tanım

G bir grup ve her bir G_{i+1}/G_i faktörü abeliyan olacak şekilde G nin

$1 = G_O \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ bir abeliyan serisi varsa *G* ye bir çözülebilir grup denir. G de en kısa abeliyan serinin uzunluğuna, G nin çözülebilirlik uzunluğu veya derived uzunluğu denir.

$G^{(0)} = G, G' = G^{(1)} = [G, G]$ ve her n≥ 1 için $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ olarak tanımlansın. Bu şekilde elde edilen
$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots$
azalan diziye G nin komütatör serisi denir. Eğer G bir çözülebilir grup ise G nin komütatör serisi sonlu adımdan sonra 1 e ulaşır. Bu durumda bir n≥0 için $G^{(n)}$=1 dir. Bu şekilde en küçük n≥0 tamsayısı G nin çözülebilirlik uzunluğuna eşittir.

Eğer G'= G ise G ye mükemmel grup ve $G^{(2)}$=1 ise G ye metabeliyan grup denir.

2.11.Teorem

G bir çözülebilir grup olsun. G nin her altgrubu ve her faktör grubu çözülebilirdir.[7]

2.12.Teorem

G bir grup ve N ⊲ G olsun. Eğer N ve N/G çözülebilirse G çözülebilirdir.[7]

2.13.Teorem

n≥5 olsun. O zaman S_n çözülebilir grup değildir.[7]

İspat

n≥5 için kabul edelim ki S_n çözülebilir olsun. O zaman Teorem 2.11 den A_n çözülebilir gruptur. A_n nın bir çözülebilir serisi
1= $H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = A_n$
olsun. Burada her 0≤ i ≤n için H_i/H_{i-1} abeliyandır. $A_n \neq 1$ olduğundan öyle bir 0<i≤n vardır ki $H_{i-1} < A_n$ fakat H_i=A_n dir. O zaman $H_{i-1} \lhd A_n$ ve A_n/H_{i-1} abeliyandır. Fakat

n≥5 ve Teorem 2.7. den A_n basit grup olduğundan H_{i-1}=1 olmalıdır. Bu durumda A_n abeliyan olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla S_n çözülebilirlik grup değildir.

2.14. Teorem

G bir grup ve $x,y,z \in G$ olsun.

(i) $[x,y]=[y,x]^{-1}$

(ii) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$ ve $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$

(iii) $[x,y^{-1}]=([x,y]^{y^{-1}})^{-1}$ ve $[x^{-1},y]=([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$

(iv) $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_t \in G$ ve $u = a_1a_2 \dots a_l$, $v = b_1b_2 \dots b_t$ olsun.

$i = 1,2, \dots, l-1$, $j = 1,2, \dots, k-1$ ve

$u_{l-i} = a_{i+1}a_{i+2} \dots a_l$, $u_0 = 1$

$v_{k-j} = b_{j+1}b_{j+2} \dots b_k$, $v_0 = 1$

olmak üzere

$$[u,v] = \prod_{i=1}^{l} \prod_{J=k}^{1} [a_i, b_j]^{v_{k-j}u_{l-i}}$$

dir.

İspat

(i) $[y,x]^{-1}=(y^{-1}x^{-1}yx)^{-1}= x^{-1}y^{-1}xy =[x,y]$

(ii) $[x,z]^y[y,z] = y^{-1}[x,z]y[y,z]$

$= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz$

$= y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$

$=(xy)^{-1}z^{-1}(xy)z$

$=[xy,z]$

$[x,z][x,y]^z=[x,z]z^{-1}[x,y]z$

$[x,z]z^{-1}[x,y]z = x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz$

$= x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz$

$= x^{-1}(yz)^{-1}x(yz)$

$=[x, yz]$

(iii) $([x, y]^{y^{-1}})^{-1} = (y[x, y]y^{-1})^{-1}$

$= (yx^{-1}y^{-1}xyy^{-1})^{-1}$

$= (yx^{-1}y^{-1}x)^{-1}$

$= x^{-1}yxy^{-1}$

$= [x, y^{-1}]$

$([x, y]^{x^{-1}})^{-1} = (x[x, y]x^{-1})^{-1}$

$= (xx^{-1}y^{-1}xyx^{-1})^{-1}$

$= (y^{-1}xyx^{-1})^{-1}$

$= xy^{-1}x^{-1}y$

$= [x^{-1}, y]$

(iv) $\prod_{i=1}^{l}\prod_{J=k}^{1}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_j}]^{v_{k-j}u_{l-i}}$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}\{(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\, \mathrm{v_0^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_k}]\mathrm{v_0}\mathrm{u_{l-i}})(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\mathrm{v_1^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-1}}]\mathrm{v_1}\mathrm{u_{l-i}})(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\mathrm{v_2^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-2}}]\mathrm{v_2}\mathrm{u_{l-i}})$

$\ldots (\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\mathrm{v_{k-2}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_2}]\mathrm{v_{k-2}}\mathrm{u_{l-i}})(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\mathrm{v_{k-1}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_1}]\mathrm{v_{k-1}}\mathrm{u_{l-i}})\}$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}\{(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_k}])\,(\mathrm{b_k^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-1}}]\mathrm{b_k})(\mathrm{b_k^{-1}}\mathrm{b_{k-1}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-2}}]\mathrm{b_{k-1}}\mathrm{b_k})$

$\ldots (\mathrm{b_k^{-1}} \ldots \mathrm{b_4^{-1}}\mathrm{b_3^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_2}]\mathrm{b_3}\mathrm{b_4} \ldots \mathrm{b_k})(\mathrm{b_k^{-1}} \ldots \mathrm{b_3^{-1}}\mathrm{b_2^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_1}]\mathrm{b_2}\mathrm{b_3} \ldots \mathrm{b_k}\mathrm{u_{l-i}})\}$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}\{\mathrm{u_{l-i}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_k}]\mathrm{b_k^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-1}}]\mathrm{b_{k-1}^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_{k-2}}] \ldots [\mathrm{a_i}, \mathrm{b_2}]\mathrm{b_2^{-1}}[\mathrm{a_i}, \mathrm{b_1}]\mathrm{u_{l-i}}\}$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}\{\mathrm{u_{l-i}^{-1}}(\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_k^{-1}}\mathrm{a_i}\mathrm{b_k})\,\mathrm{b_k^{-1}}(\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_{k-1}^{-1}}\mathrm{a}_i\mathrm{b_{k-1}})\mathrm{b_{k-1}^{-1}}(\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_{k-2}^{-1}}\mathrm{a}_i\mathrm{b_{k-2}})\mathrm{b_{k-2}^{-1}}$

$\ldots (\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_2^{-1}}\mathrm{a}_i\mathrm{b_2})\mathrm{b_2^{-1}}(\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_1^{-1}}\mathrm{a}_i\mathrm{b_1})\mathrm{b_2}\mathrm{b_3} \ldots \mathrm{b_k}\mathrm{u_{l-i}}\}$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{b_k^{-1}}\mathrm{b_{k-1}^{-1}}\mathrm{b_{k-2}^{-1}} \ldots .\, \mathrm{b_2^{-1}}\mathrm{b_1^{-1}}\mathrm{a}_i\, \mathrm{b_1}\mathrm{b_2}\mathrm{b_3} \ldots \mathrm{b_k}\mathrm{u_{l-i}})$

$=\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{l}}(\mathrm{u_{l-i}^{-1}}\, \mathrm{a_i^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a}_i\mathrm{v}\, \mathrm{u_{l-i}})$

$=(\mathrm{u_{l-1}^{-1}}\mathrm{a_1^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_1}\mathrm{v}\, \mathrm{u_{l-1}})\,(\mathrm{u_{l-2}^{-1}}\mathrm{a_2^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_2}\mathrm{v}\, \mathrm{u_{l-2}})(\mathrm{u_{l-3}^{-1}}\mathrm{a_3^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_3}\mathrm{v}\, \mathrm{u_{l-3}})$

$\ldots (\mathrm{u_1^{-1}}\mathrm{a_{l-1}^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_{l-1}}\mathrm{v}\, \mathrm{u_1})(\mathrm{u_0^{-1}}\mathrm{a_1^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_1}\mathrm{v}\, \mathrm{u_0})$

$=\mathrm{u^{-1}}\mathrm{v^{-1}}\mathrm{a_1}\mathrm{a_2}\mathrm{a_3} \ldots \mathrm{a_{l-1}}\mathrm{a_l}\mathrm{v} = [\mathrm{u}, \mathrm{v}]$

2.15.Teorem

G bir grup ve H, G nin normal altgrubu olsun. G/H bölüm grubunun abeliyan olması için gerek ve yeter şart $G' \leq$ H olmasıdır.[6]

2.16.Teorem

G bir grup ve A,B≤G olsun. O zaman [A,B] $\triangleleft$ < A,B> dır.

İspat

$a, b \in A$ ve $c, d \in B$ olsun. Teorem 2.14(ii) den

$[a, c]^{d}$=$[a, d]^{-1}[a, cd] \in [A, B]$

ve

$[a, c]^{b} = [ab, c]\ [b, c]^{-1} \in [A, B]$

olduğundan [A,B] $\triangleleft$ < A,B> elde edilir.

2.17. Teorem

A ve B bir G grubunun iki abeliyan altgrubu olmak üzere G=AB ise, G bir metabeliyan gruptur.

İspat

Teorem 2.16 ye göre

[A,B] $\triangleleft$ < A,B>=G

dir. G/[A,B] faktör grubu abeliyandır. Gerçekten A ve B abeliyan ve G=AB olduğundan $a \in A$ ve $b \in B$ için (a[A,B])(b[A,B])=(b[A,B])(a[A,B]) olduğunu göstermek yeterlidir. [a,b]=$a^{-1}b^{-1}ab \in$ [A,B] olduğundan

ab[A,B]=ba[A,B]

yazabiliriz. Buna göre

(a[A,B])(b[A,B])=(b[A,B])(a[A,B])

dir. Dolaysıyla G/[A,B]= < a[A,B] ,b[A,B] | $a \in A$, $b \in B$ > faktör grubu abeliyandır. Teoreme 2.15 e göre $G' \leq$ [A,B] dir. Diğer taraftan [A,B] $\leq G'$ olduğundan G'=[A,B] elde edilir. Böylece [A,B] nin abeliyan olduğu gösterilirse $[A, B]' = G^{(2)} = 1$ olduğu ispat edilmiş olur ve dolaysıyla G bir metabelyan gruptur.

$a\,, a' \in A$ ve $b, b' \in B$ olsun. Bu takdirde belli $a'', a^* \in A$ ve $b'', b^* \in B$ yardımıyla

$b^{a'} = a''b^*$ ve $a^{b'} = b''a^*$

yazabiliriz. Böylece

$$[a,b]^{a'b'} = [a,b^{a'}]^{b'} = [a,a''b^*]^{b'} = [a,b^*]^{b'} = [a^{b'},b^*] = [b''a^*,b^*] = [a^*,b^*]$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$[a,b]^{b'a'} = [a^*,b^*]$$

dır. Bunlar yardımıyla

$$[a,b]^{[a'^{-1},b'^{-1}]} = [a,b]^{a'b'(a')^{-1}(b')^{-1}} = [a^*,b^*]^{(a')^{-1}(b')^{-1}} = [a^*,b^*]^{(b'a')^{-1}}$$
$$= [a,b]^{b'a'(b'a')^{-1}} = [a,b]$$

elde edilir. Buna göre G nin [A,B] normal altgrubu abeliyandır ve böylece $[A,B]' = 1$ olduğundan $G^{(2)} = 1$ dir.

2.18.Tanım

G bir grup olsun. *G* den *G* ye bir homomorfizmaya *G* nin bir endomorfizması, *G* den *G* ye bir izomorfizmaya ise *G* nin otomorfizması denir. *G* nin bütün endomorfizmalarının kümesi *End(G)* ve otomorfizmalarının kümesi *Aut(G)* ile gösterilir.

2.19.Teorem

Aut(G), *End(G)* nin bir altkümesidir. Ayrıca *Aut(G)* fonksiyon bileşke işlemine göre bir gruptur.[7]

2.20. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $\propto \in$ AutG için $H^{\propto} \leq G$ ise H ye G nin karakteristik altgrubu denir.

2.21. Tanım

G bir grup ve $a \in G$ olsun.

$C_G(a)=\{ x\in G : xa=ax \}=\{x\in G : [x,a]=1\}$

kümesine *a* nın *G* içindeki merkezleyeni denir. Eğer $N\leq G$ ise

$C_G(N)=\{ x\in G :$ her $n\in N$ için $[n,x]=1\}$

kümesine *N* nin *G* içindeki merkezleyeni denir. $C_G(a)$ ve $C_G(N)$, *G* nin altgruplarıdır. Özel olarak $N\lhd G$ ise $C_G(N)\lhd G$ dir. $C_G(G)$ altgrubuna *G* nin merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir. Ayrıca $Z(G)\lhd G$ ve $Z(G)$ *G* nin karakteristik altgrubudur.

2.22.Teorem

Bir sonlu üreteçli sonsuz çözülebilir grubun her abeliyan normal altgrupları sonludur.[5]

2.23.Tanım

G bir grup ve $Z_0(G)=1$, $Z_1(G)=Z(G)$; her $i\geq 1$ için $Z_i=Z_i(G)$, $Z(G/Z_{i-1}(G))$ nin G deki ters görüntüsü olsun. O zaman $Z_i=Z_i(G)$ ye G nin i. merkezi denir.
O zaman her $i\geq 0$ için $Z_i(G)\lhd G$ ve $Z_i(G)\leq Z_{i+1}(G)$ dir. Böylece G nin normal altgruplarının
$1=Z_0(G)\leq Z_1(G)\leq\cdots$
Bir artan dizisi (zinciri) elde edilir. Buna G nin yukarı merkez serisi denir.

Ayrıca her i=1,2,… için $[Z_i,G]\subset Z_{i-1}$dir. Bu serinin her terimi G nin karakteristik altgrubudur. Eğer G nin yukarı merkez serisi sonlu adımdan sonra G ye ulaşılıyorsa o zaman G ye bir nilpotent grup denir. Bu durumda $Z_n(G)=G$ eşitliğini sağlayan en küçük n sayısına G nin nilpotentlik uzunluğu denir.

2.24.Teorem (Grün's Lemma)

G bir mükemmel grup ise o zaman G/Z(G) faktör grubunun merkezi aşikardır. Yani;
$Z_2(G)=Z_1(G)$ dir.

İspat

$aZ(G) \in Z(G/Z(G))$ olsun. O zaman her $g \in G$ için $agZ(G)=gaZ(G)$ ve böylece $aga^{-1}g^{-1}Z(G) = Z(G)$ olduğundan $[a,g] \in Z(G)$ dir. O zaman $\varphi_a : G \to Z(G)$ ye , $\varphi_a(g)=[a,g]$ fonksiyonu tanımlıdır. Ayrıca her $g,h \in G$ için Teorem 2.14. den dolayı $[a,gh]=[a,h][a,g]^h$ dır. Ayrıca $[a.g] \in Z(G)$ olduğundan $[a,g]^h = [a,g]$ dir. Böylece

$\varphi_a(gh) = [a,h][a,g] = \varphi_a(h)\varphi_a(g)$

olduğundan φ_a bir homomorfizmadır. Böylece $G/\operatorname{Ker}\varphi_a \cong \operatorname{Im}(G) \leq Z(G)$ olduğundan $G/\operatorname{Ker}\varphi_a$ abeliyandır. O zaman Teorem 2.15 den dolayı $G' \leq \operatorname{Ker}\varphi_a$ dir. O zaman $G/\operatorname{Ker}\varphi_a$ $= G'/\operatorname{Ker}\varphi_a$ aşikar ve $\operatorname{Im}(\varphi_a)=1$ dir. Böylece her $g \in G$ için

$$
\begin{aligned}
\varphi_a(g) = e &\Rightarrow [g,a]=e \\
&\Rightarrow ga=ag \\
&\Rightarrow a \in Z(G) \\
&\Rightarrow aZ(G) = Z(G) \\
&\Rightarrow Z(G/Z(G))=1
\end{aligned}
$$

dir.

2.25. Tanım

G bir grup olsun. Eğer *G* nin her elemanın mertebesi sonlu ise *G* ye torsiyon (periyodik) grup denir. Eğer *G* nin birimden başka hiçbir elemanının mertebesi sonlu değilse *G* ye torsiyonsuz grup denir. Eğer *G* nin en az bir elemanının mertebesi sonsuz ise *G* ye periyodik olmayan grup denir.

2.26. Tanım

G bir grup ve *p* asal sayı olsun. Her $g \in G$ için $g^{p^n}=1$ olacak şekilde bir $n \geq 0$ tamsayısı varsa, başka bir deyişle *G* nin her elemanının mertebesi *p* nin bir kuvveti ise o zaman *G* ye bir *p*-grubu denir.

2.27. Tanım

$G=\left\langle c_i : c_1^p = 1, c_{i+1}^p = c_i, i = 1,2,\ldots \right\rangle$ şeklinde tanımlı *G* grubuna bir lokal devirli *p*-grubu veya prüfer tipli grup veya quasidevirli grup denir ve C_{p^∞} ile gösterilir. C_{p^∞} grup her öz altgrubu sonlu devirli grup olan sonsuz bir *p*-grubudur.

2.28. Tanım

G bir grup ve i=1,2,… için $H_i \triangleleft G$ olmak üzere
$\ldots \mathrm{H}_3 \leq \mathrm{H}_2 \leq \mathrm{H}_1$
şeklinde ki her serisi sonlu ise G ye normal altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar denir.

Bütün sonlu gruplar minimal şartını sağlar. Ayrıca C_{p^∞} tipindeki gruplar, her öz altgrubu sonlu olduğundan minimal şartını sağlar.

Bir grubun minimal şartına sahip olması için gerek ve yeter şart altgruplarının her azalan zincirinin sonlu adımda sona ermesidir.

2.29.Tanım

G bir grup olsun. Eğer G grubu minimal şartını sağlayan bir abeliyan grubun sonlu genişlemesiyse G ye bir Chernikov grup denir.

Minimal şartını sağlayan bir abeliyan grup sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımına izomorf olduğundan bir Chernikov grup, sonlu sayıda C_{p^∞} tipindeki grupların direkt çarpımının sonlu genişlemesi şeklinde de tanımlanır. Eğer bir grup sonlu sayıda quasideviri grubun direkt çarpımının bir sonlu genişlemesi ise o zaman gruba da bir Chernikov grup denir.

2.30.Teorem

Chernikov grubun otomorfizmalarının periyodik grubu Chernikovdur.[6]

2.31. Teorem

G sonlu üreteçli abeliyan grup olsun. G grubu her biri sonsuz veya asal mertebeli devirli grupların sonlu sayıda direkt toplamına izomorftur.[6]

2.32. Tanım

G bir grup ve *H, G* nin bir altgrubu olsun. *H* nın *G* içindeki kosetlerinin kümesinin kardinalitesine *H* nın *G* içindeki indeksi denir ve $|G : H|$ ile gösterilir.

2.33. Teorem

G sonlu üreteçli bir grup ve H, G nin sonlu indeksli altgrubu ise o zaman H sonlu üreteçlidir. [6]

2.34. Tanım

G bir grup ve N, G nin normal altgrubu olsun. Eğer N ve G/N lokal sonlu ise o zaman G lokal sonludur.

2.35.Tanım

G bir grup olsun. G nin her sonlu üreteçli altgrubu nilpotent ise G ye lokal nilpotent grup denir.

2.36.Tanım

Faktörleri lokal nilpotent olan bir artan seriye sahipse gruba radikal grup denir.

2.37.Tanım

G bir grup olsun. Her x$\in$ G ve her pozitif m tamsayısı için
x=y^m

olacak şekilde bir y∈G varsa G ye bir köklü (radicable) grup denir. Toplamsal gruplarda köklü terimi yerine divisible (bölünebilir) terimi kullanılır. Eğer her pozitif m tamsayısı için $G^m = G$ ise G ye quasi-divisible (yarı-köklü) grup denir. Burada

$G^m =< g^m | \, g \in G >$

dir.

2.38.Teorem

Her divisible abeliyan grup quasidevirli gruplar ve Q nun kopyalarının direk toplamıdır.[6]

2.39.Tanım

G bir grup olsun. *G* nin içinde sonlu sayıda eşleniği olan *G* nin bir elemanına *G* nin *FC-elemanı* denir. *G* nin bütün FC-elemanları bir altgrup oluşturur ve bu altgruba *G* nin *FC-merkezi* denir. *G* nin FC-merkezi *G* nin karakteristik altgruptur. Eğer G grubu FC-merkezine eşit ise G ye FC-grup denir.

2.40. Teorem

G, FC-grup olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) G nin FC-grup olması için gerek ve yeter şart $|G : C(x)|$ *G* in sonlu olmasıdır.[5]

ii) *G*, FC-grup ise G' periyodiktir.[5]

iii) *G* nin FC-grup olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in G$ için $\langle x \rangle G$ nin sonlu bir grubun devirli grupla genişlemesi olmasıdır.[5]

2.41. Teorem

Eğer G bir grup G' sonlu ise G bir FC gruptur.

İspat

x∈G olsun. O zaman her g∈G için $g^{-1}xg = x[x,g]$ olduğundan xG'=C[a] sonludur. Böylece G nin bütün elemanlarının eşlenik sınıfları sonlu dolaysıyla G bir FC gruptur.

2.42. Teorem

G grubunun bir altgrubu H olsun. O zaman
$C_G(H) \lhd \ N_G(H)$ ve $N_G(H) \,/\, C_G(H) \ \cong Aut\, H$
dır.[5]

2.43. Tanım

G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun. Bir
$* : G \times A \rightarrow A$, $(g, a) \rightarrow *\big((g, a)\big) = g * a$
fonksiyonu verilsin. Eğer
(i) her a∈ A için $e*a = a$ ise ;
(ii) her a∈ A ve g , h ∈ G için$(gh) *a=g* (h*a)$ ise
o zaman $*$ fonksiyonuna G nin A üzerine bir etkisi ve A ya bir G-kümesi denir.

2.44.Tanım

G grubu boştan farklı bir X kümesine etki etsin. Eğer Y, X in bir altkümesi olmak üzere her g∈G için
$y \in Y \Rightarrow y^g \in Y$
oluyorsa Y kümesine G-invarianttır denir.

2.45. Tanım

X boştan farklı bir küme ve G de SymX in bir altgrubu olsun. O zaman G ye X üzerinde bir permütasyon grubu denir

2.46. Tanım

H ve K sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde grup etkisiyle tanımlanan birer permütasyon grupları olsun. H ve K nın çelenk çarpımı denilen yani bir permütasyon grubu tanımlayalım. Bu grup $Z = X \times Y$ kartezyen çapım kümesi üzerine etki eder. Eğer $\gamma \in H$, $y \in Y$ ve $k \in K$ olmak üzere Z nin $\gamma(y)$ ve k^* permütasyonları sırasıyla

$\gamma(\mathrm{y})$: $\begin{cases} (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) \rightarrow (\gamma(\mathrm{x}), \mathrm{y}) & \mathrm{y}_1 = \mathrm{y} \text{ ise} \\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) \rightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) & \mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y} \text{ ise} \end{cases}$ $\quad \mathrm{k}^* : (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) \rightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{K}(\mathrm{y}))$

şeklinde tanımlansın.

Öncelikle $\gamma^{-1}(\mathrm{y}) = (\gamma(\mathrm{y}))^{-1}$ ve $(\mathrm{k}^{-1})^* = (\mathrm{k}^*)^{-1}$ olduğu açıktır.

$\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}$ ise $(\gamma_{\mathrm{y}}^{-1}\gamma_{\mathrm{y}})(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = \gamma_{\mathrm{y}}^{-1}(\gamma(\mathrm{x}), \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1)$ dir.

$\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y}$ ise $\gamma_{\mathrm{y}}^{-1}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1)$ dir.

$(\gamma_{\mathrm{y}}\gamma_{\mathrm{y}}^{-1})(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = \gamma_{\mathrm{y}}(\gamma_{\mathrm{y}}^{-1}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) = \gamma_{\mathrm{y}}(\gamma_{\mathrm{y}}^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) = \gamma_{\mathrm{y}}(\gamma^{-1}(\mathrm{x}), \mathrm{y}) = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$(\gamma_{\mathrm{y}}\gamma_{\mathrm{y}}^{-1})(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = \gamma_{\mathrm{y}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1) = (\mathrm{x}, \mathrm{y}_1)$

$(\mathrm{k}^*(\mathrm{k}^{-1})^*)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{k}^*(\mathrm{x}, \mathrm{k}^{-1}(\mathrm{y})) = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$((\mathrm{k}^{-1})^*\mathrm{k}^*)(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{k}^{-1})^*(\mathrm{x}, \mathrm{k}(\mathrm{y})) = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$\gamma^{-1}(\mathrm{y}) = (\gamma(\mathrm{y}))^{-1}$ ve $(\mathrm{k}^{-1})^* = (\mathrm{k}^*)^{-1}$ olduğundan $\gamma(\mathrm{y})$ ve k^* permütasyondur. $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ sabit eleman olmak üzere $\mathrm{f}_1 : \gamma \rightarrow \gamma_{\mathrm{y}}$ ve $\mathrm{f}_2 : \mathrm{k} \rightarrow \mathrm{k}^*$ fonksiyonları sırasıyla H ve K dan Sym(Z) ye monomorfizmalardır. Ayrıca görüntüleri sırasıyla H(y) ve K^* olsun.

$(\mathrm{f}_1(\gamma_1, \gamma_2))(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = (\gamma_{1y}, \gamma_{2y})(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \begin{cases} ((\gamma_1, \gamma_2)\mathrm{a}, \mathrm{b}) & , \mathrm{b} = \mathrm{y} \text{ ise} \\ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) & , \mathrm{b} \neq \mathrm{y} \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} (\gamma_1, \gamma_2)(\mathrm{a}, \mathrm{b}) & , \mathrm{b} = \mathrm{y} \text{ ise} \\ (\mathrm{a}, \mathrm{b}) & , \mathrm{b} \neq \mathrm{y} \text{ ise} \end{cases}$

$= \mathrm{f}_1(\gamma_{1y}, \gamma_{2y})$

Bu durumda H ve K nın çelenk çarpımı K^* ve $\forall$ $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ H(y) nin ürettiği Z nin üzerinde permütasyon grubudur ve

$\mathrm{H} \sim \mathrm{K} = \langle \mathrm{H}(\mathrm{y}), \mathrm{K}^* ; \mathrm{y} \in \mathrm{Y} \rangle$

şeklinde yazılır.

$(\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}}\mathrm{k}^*$ fonksiyonu $(\mathrm{x}, \mathrm{k}(\mathrm{y}))$ yi $(\gamma(\mathrm{x}), \mathrm{k}(\mathrm{y}))$ ya götürür ve $\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{k}(\mathrm{y})$ için $(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ sabit bırakır. Gerçekten

$(\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}}\mathrm{k}^* = \gamma_{k(y)}$ ve $(\mathrm{k}^*)^{-1}\mathrm{H}(\mathrm{y})\mathrm{k}^* = \mathrm{H}(\mathrm{k}(\mathrm{y}))$ (1)

olduğunu gösterelim.

$\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{k}(\mathrm{y})$ için

$((\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}}\mathrm{k}^*)(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) = ((\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}})(\mathrm{x}_1, \mathrm{k}(\mathrm{y}_1)) = (\mathrm{k}^*)^{-1}(\mathrm{x}_1, \mathrm{k}(\mathrm{y}_1)) = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$

$= \gamma_{k(y)}$

$\mathrm{y}_1 = \mathrm{k}(\mathrm{y})$ için

$((\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}}\mathrm{k}^*)(\mathrm{x}, \mathrm{k}(\mathrm{y})) = ((\mathrm{k}^*)^{-1}\gamma_{\mathrm{y}})(\mathrm{x}, \mathrm{k}(\mathrm{k}(\mathrm{y}))) = ((\mathrm{k}^*)^{-1}(\gamma(\mathrm{x}), \mathrm{k}(\mathrm{k}(\mathrm{y}_1)))$

$= (\gamma(\mathrm{x}), \mathrm{k}(\mathrm{y}_1)) = \gamma_{k(y)}$

dır. Böylece$((\mathrm{k}^*)^{-1}\mathrm{k}^* = \gamma_{\mathrm{k}(\mathrm{y})}$ dir.

$\forall\gamma \in \mathrm{H}$ için $\mathrm{k}^{*-1}\gamma_{\mathrm{y}}\mathrm{k}^* = \gamma_{k(y)}$olduğundan $\mathrm{k}^{*-1}\mathrm{H}(\mathrm{y})\mathrm{k}^* = \mathrm{H}(\mathrm{k}(\mathrm{y}))$ dır.

Ayrıca y$\neq$ $\mathrm{y}_1$iken γ_y ve $\gamma_{y'}$ permütasyonları Z nin ayrı elemanlarına hareket ettirmez. Bundan H(y) nin direkt çarpımlarını üreteçlerinin direkt çarpımına B diyelim. B ye çelenk çarpımın taban grubu denir ve

$$B = \underset{y \in Y}{\mathrm{Dr}}\, H(y).$$

şeklinde yazılır. K^* ın bir k^* elemanının eşlenikleri ile H(y) direkt çarpanları (1) den dolayı değişmelidir. Benzer şekilde Y nin k elemanları ile değişmelidir. K^* ve B nin elemanları Z nin aynı elemanına hareket ettirmediğinden $K^* \cap B = 1$ dir. B $\triangleleft$ W ve W=K^*B dir. Böylece W ,K^* ve B nin semidirekt çarpımıdır. (1) den $\forall k^* \in K^*$ için $\varphi_{k^*}: B \to B, \gamma_y \to \gamma_{k(y)}$ için $\varphi_{k^*}(\gamma_y) = (k^*)^{-1}\gamma_y k^* = \gamma_{k(y)}$ şeklinde tanımlı φ_{k^*} B den B ye bir otomorfizma ve φ de $\varphi(k^*) = \varphi_{k^*}$ şeklinde tanımlı K^* dan AutB ye bir otomorfizmadır.

Burada K^* =K olarak alınacaktır.

2.47.Tanım

G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Eğer her x, y $\in$ X için y=x^{π} olacak şekilde π $\in$G varsa G ye geçişli (transitive) permütasyon grubu denir.

2.48.Teorem

H ve K sırasıyla X ve Y üzerinde birer permütasyon grupları olsun.

(i) H ve K transitive ise H~K da geçişli permütasyon grubudur.

(ii) U üzerinde L bir permütasyon grubu ise

β: (X x Y) xU $\to$ X x (Y x U) , ((x,y),u)$\to$ (x,(y,u)) şeklinde tanımlanan β birebir örten bir fonksiyon ve α da Sym((X x Y) xU) den Sym(X x (Y x U)) ye $\alpha: \tau \to \beta^{-1}\tau\beta$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. O zaman

(α, β): (H ~ K) ~L $\to$ H ~ (K ~ L)

dir.

İspat

(i) $(x,y),(x',y') \in Z = X \times Y$ olsun. Tanım 2.47. den $\gamma \in H$ ve $k \in K$ vardır ki $x' = \gamma(x)$, $y' = k(y)$ dir.

$\gamma_{y'}: (x,y) \to (\gamma(x), y)$ $k:(x,y) \to (x,k(y))$

$k\gamma_{y'}(x,y) = (\gamma(x), k(y)) = (x', y')$

olduğundan H~K geçişli permütasyon grubudur.

(ii) S=: (X x Y) xU ve T= X x (Y x U) olsun.

$\alpha: \tau \to \beta^{-1}\tau\beta$ şeklinde tanımlanan Sym(S) den Sym(T) ye bir izomorfizmdir. Bu izomorfizm altında (H ~ K) ~L nin görüntüsüne bakalım eğer $\gamma \in H$ ise o zaman $\gamma_y(u)$: $((x,y),u) \to ((\gamma(x), y), u)$ ve $u_1 \neq u$ veya $y_1 \neq y$ ise $((x, y_1), u_1)$ i sabit bırakır. Bu yüzden

$(\beta^{-1}\gamma_y(u)\beta$: $((x,y),u) \to ((\gamma(x), y), u)$ ve $(y_1, u_1) \neq (y, u)$ ise $(x,((y_1, u_1))$i sabit bırakır. $(y_1, u_1) = (y, u)$ ise

$(\beta^{-1}\gamma_y(u)\beta)(((x,y),u)) = (\beta^{-1}\gamma_y(u))(x,(y,u)) = (\beta^{-1}((x,y),u) = (x,(y,u)) = \gamma_y(u)$

$(y_1, u_1) \neq (y, u)$ ise

$(\beta^{-1}\gamma_y(u)\beta)(((x,y),u)) = \beta^{-1}((\gamma(x), y), u) = ((\gamma(x), y), u) = \gamma_y(u)$

$\beta^{-1}\gamma_y(u)\beta = \gamma_y(u)$ dır.

$k \in K$ ve $\mu \in L$ ise $\beta^{-1}k(u)\beta = k^*(u)$ ve $\beta^{-1}\mu(u)\beta = \mu^*(u)$ burada * denilen $H \sim (K \sim L)$ daki permütasyondur. α içinde $(H \sim K) \sim L \to H \sim (K \sim L)$ ve (α, β) benzer şekilde yapılır.

3. BAZI YARDIMCI ÖNERMELER

Bu çalışmada kullanılan bazı notasyonları tekrar hatırlayalım.

G bir grup ve a,b$\in$G olsun. a ile b nin komütatörü [a,b]=$a^{-1}b^{-1}ab$ ve a nın b ile eşleniği ise $a^b = b^{-1}ab$ ile gösterilir.

R ve N bir G grubunun altkümesi olsun. a$\in$R ve b$\in$N olmak üzere bütün [a,b] komütatörlerinin kümesi [R,N] ile gösterilir.

R ve N nin elemanlarının kümesinin çarpımı RN ile gösterilir.

$\prod R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(R \dots R)}_{k\ \mathrm{tane}}$

kümesi R nin elemanlarının kümesi tarafından üretilen bir altgruptur ve $< R >$ ile gösterilir.

G bir çözülebilir grup ve G nin

$G=G^{(0)} \geq G' \geq \cdots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \cdots$

komütatör altgruplarının serisi olsun. $G^{(s)}$=1 olacak şekilde en küçük s tamsayısına G çözülebilir grubunun çözülebilirlik uzunluğu denir.

G grubunun boştan farklı R altkümesi için

$R^{(0)} = R$, s=1,2,… için $R^{(s)} = [R^{s-1}, R^{s-1}]$

olarak tanımlansın. $R^{(s)}$ kümesinin elemanlarına s-kat komütatörler denir veya kısaca R kümesinin s-kat komütatörü denir.

Bilindiği üzere G grubunun çözülebilir ve çözülebilirlik sınıfı s olması için gerek ve yeter şart $G^{(s)}$=1 olmasıdır.

Eğer bir G grubunun boştan farklı R altkümesi için $R' = [R, R] \subseteq R$ ise R kümesine komütatör kapalı küme denir.

Şimdi komütatörlerin bazı özellikleri komütatör kapalı kümeler içinde sağlanır mı? sorusuna yanıt olarak aşağıdaki lemmayı verelim.

3.1. Lemma

R bir G grubunun komütatör kapalı altkümesi olsun. O zaman aşağıdaki özellikleri sağlanır.

(i) $s \geq t \geq 0$ tamsayısı için $R^{(s)} \subseteq R^{(t)}$

(ii) $< R >$ altgrubunun keyfi bir g elemanı için, R nin öyle g_1 ve g_2 elemanı vardır ki $g = g_1 . g_2^{-1}$

şeklinde yazılabilir.

(iii) Eğer $a \in R$ ise $a^{-1} R^{(s)} a \subseteq \prod R^{(s)}$ dir.

İspat

(i) Tümevarım ve komütatör kapalı tanımını uygulayarak gösterelim. s=1 için $0 \leq t \leq s$ olduğundan t=0 veya t=1 dir. R komütatör kapalı olduğundan $R^{(s)} = R' \subseteq R^0 = R = R^{(t)}$ ve böylece $R^{(s)} = R^{(t)}$ dir. O halde s > 1 ve iddia s=k için doğru olsun. Yani $k \geq t \geq 0$ için $R^{(k)} \subseteq R^{(t)}$ olsun. İddianın s=k+1 için doğru olduğunu gösterelim. $x \in R^{(k+1)}$ ise x=[a,b] olacak şekilde $a,b \in R^{(k)}$ vardır. Tümevarım hipotezinden $R^{(k)} \subseteq R^{(k-1)}$ olduğundan $a,b \in R^{(k-1)}$ dir. Böylece $x \in [R^{(k-1)}, R^{(k-1)}] = R^{(k)}$ olduğundan $x \in R^{(k)}$ dır. Böylece $R^{(k+1)} \subseteq R^k$ dır.

(ii) Hipotezden $g \in < R >$ için a_i ve a_i^{-1} den biri R de olmak üzere

$$g = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir.

m=1 için $g = a_1$ açıkça görülür. m-1 için doğru olsun. $u_i, v_j \in R$ olmak üzere $h_1 = u_1 u_2 u_3 \ldots u_r$, $h_2 = v_1 v_2 v_3 \ldots v_t$ olsun. O zaman

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} = h_1 . h_2^{-1} \Rightarrow a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m = h_1 . h_2^{-1} a_m$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m = h_1 (a_m^{-1} h_2)^{-1}$$

dir. Eğer $a_m^{-1} \in R$ ise $g_1 = h_1$, $g_2 = a_m^{-1} v_1 v_2 v_3 \ldots v_t$ alınırsa $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m = g_1 . g_2^{-1}$ elde edilir. Eğer $a_m^{-1} \notin R$ ise kabulden o zaman $a_m \in R$ dir. Bu durumda

$$g = h_1 h_2^{-1} a_m = h_1 v_t^{-1} v_{t-1}^{-1} \ldots v_2^{-1} v_1^{-1} a_m$$

$$= h_1 v_t^{-1} v_{t-1}^{-1} \ldots v_2^{-1} (a_m a_m^{-1}) v_1^{-1} a_m (v_1 v_1^{-1})$$

$$= h_1 v_t^{-1} v_{t-1}^{-1} \ldots v_2^{-1} a_m [a_m, v_1] v_1^{-1}$$

$=h_1v_t^{-1}v_{t-1}^{-1}\ldots v_3^{-1}(a_m a_m^{-1})v_2^{-1}\,a_m v_2[\,a_m,v_1][\,a_m,v_1]^{-1}v_2^{-1}[\,a_m,v_1]v_2\,v_2^{-1}v_1^{-1}$

$=h_1v_t^{-1}v_{t-1}^{-1}\ldots v_3^{-1}\,a_m[\,a_m,v_2]\,[\,a_m,v_1][\,a_m,v_1,v_2]v_2^{-1}v_1^{-1}$

dir. Bu şekilde $v_1^{-1},v_2^{-1},\ldots,v_t^{-1}$ elemanları sağa kaydırılarak devam edilirse $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_p$ $a_m,v_1,v_2,v_3,\ldots,v_t$ lerin komütatörleri olmak üzere

$g=h_1x_1x_2x_3\ldots x_pv_t^{-1}v_{t-1}^{-1}\ldots v_2^{-1}v_1^{-1}$

elde edilir. R komütatör kapalı olduğu için x_i ∈R ve böylece $g_1=h_1x_1x_2x_3\ldots x_p=u_1u_2u_3\ldots u_rx_1x_2x_3\ldots x_p$ ve $g_2=h_2=v_1v_2v_3\ldots v_t$ alınırsa g nin

$g=g_1.g_2^{-1}$

şeklinde gösterimi elde edilir.

(iii) s üzerine tümevarım ile eğer a∈ R ise $a^{-1}R^{(s)}a\subseteq\prod R^{(s)}$ olduğunu gösterelim. s=0 için $R^{(0)}$ =R olduğundan her b∈ R için

$a^{-1}ba=bb^{-1}a^{-1}ba=b[a,b]\in RR'\subseteq RR$

dır. Böylece $a^{-1}R^{(0)}a\subseteq\prod R^{(0)}$ dır. Şimdi de s>0 ve iddia s-1 için doğru olsun. $R^{(s)}$ kümesinin herhangi bir elemanı b olsun. O zaman b=[c,d] olacak şekilde c,d∈ $R^{(s-1)}$ vardır.

$a^{-1}ba=a^{-1}[c,d]a=a^{-1}c^{-1}d^{-1}cda=a^{-1}c^{-1}aa^{-1}d^{-1}aa^{-1}caa^{-1}da=[a^{-1}ca,a^{-1}da]$

Tümevarım hipotezinden $a^{-1}ca,a^{-1}da\in\prod R^{(s-1)}$ dir; yani $R^{(s-1)}$ elemanlarının çarpımı olarak yazılabilirler. Teorem 2.14(iv) den f,g, $,h_1,h_2,h_3,\ldots,h_n\in R^{(s-1)}$ olmak üzere $a^{-1}ba$ elemanı $[f,g]^{h_1h_2h_3\ldots h_n}$ biçimindeki elemanların çarpımına eşittir. Böylece $R^{(s-1)}$ kümesinin herhangi f,g,h elemanları için $[f,g]^h\in\prod R^{(s)}$ dir. Çünkü (i) den [f,g]∈ $R^{(s)}\subseteq R^{(s-1)}$ ve [[f,g],h] ∈ $R^{(s)}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
[f,g]\,[[f,g],h]&=(f^{-1}g^{-1}fg)(g^{-1}f^{-1}gfh^{-1}f^{-1}g^{-1}fgh)\\
&=h^{-1}f^{-1}g^{-1}fgh\\
&=h^{-1}[f,g]\,h\\
&=[f,g]^{\,h}\in R^{(s)}R^{(s)}
\end{aligned}
$$

dir.

3.2. Lemma

G bir grup ve R de G nin üreteçlerinin bir komütatör kapalı sistemi ve $R^{(s)}$ =1 olsun. O zaman G çözülebilirdir ve çözülebilirlik uzunluğu ≤ s dir.

İspat

Bir t$\geq$ 1 tamsayısı için G nin herhangi bir t-kat komütatörü $R^{(t)}$ kümesinin bazı elemanlarıyla eşlenik olan elemanlarının çarpımına eşit olduğunu gösterelim.

t üzerine tümevarım uygulayalım. t=1 ve G nin herhangi bir komütatörü [g,h] olsun. R, G nin üreteçlerinin kümesi olduğundan g ve h elemanları ve tersleri R nin belirli elemanlarının çarpımı olarak yazılabilir. [g,h] komütatörü Teorem 2.14.(iv) den $[a,b]^c$ şeklindeki elemanların çarpımı olarak yazılabilir ki burada a veya a^{-1}den en az biri ve b veya b^{-1} den en az biri R dedir. Teorem 2.14.(iv) den k,l $\in$R $\subseteq$ G ve m$\in$G için $[a,b]^c = [k,l]^m$ olduğunu gösterelim.

1.Durum
a$\in$R ve b$\in$R ise açıktır.

2.Durum
a^{-1} $\in$R ve b$\in$R ise
$[a,b]^c = c^{-1}[(a^{-1})^{-1},b]c = c^{-1}[b,a^{-1}]^a c=[b,a^{-1}]^{ac}$

3.Durum
a$\in$R ve b^{-1} $\in$R ise
$[a,b]^c=c^{-1}[a,(b^{-1})^{-1}]c = c^{-1}[b^{-1},a]^b c =[b^{-1},a]^{bc}$

4.Durum
a^{-1} $\in$R ve b^{-1} $\in$R olsun.
$[a,b]^c = c^{-1}[(a^{-1})^{-1},b]c = c^{-1}[b,a^{-1}]^a c =c^{-1}a^{-1}[(b^{-1})^{-1},a^{-1}]ac$
$= c^{-1}a^{-1}[a^{-1},b^{-1}]^{b}ac = [a^{-1},b^{-1}]^{bac}$
elde edilir. Böylece t=1 için G nin herhangi bir komütatörü R nin bazı elemanlarının eşleniklerinin çarpımına eşittir. O halde t>1 ve iddia (t-1)-kat komütatör için doğru olsun. x, G nin herhani bir t-kat komütatörü olsun. O zaman g ve h G nin (t-1)-kat komütatörü olmak üzere x=[g,h] olsun. Tümevarım hipotezinden g ve h elemanları $R^{(t-1)}$ in elemanları ile eşlenik elemanlarının çarpımıdır. O zaman Teorem 2.14. (iv) den a, b $\in$ $R^{(t-1)}$ ve c,

d,f $\in$ G olmak üzere x, $[a^c, b^d]^f$ şeklindeki elemanlarının çarpımıdır. $[a^c, b^d]^f$ komütatörünün $R^{(t)}$ nin elemanları ile eşlenik elemanlarının çarpımı olduğunu gösterelim.

$[a^c, b^d]^f = [a^{cd^{-1}d}, b^d]^f = [a^{cd^{-1}}, b]^{df}$

dir. $c_1 = cd^{-1}$, $f_1 = df$ olarak alınırsa $[a^c, b^d]^f = [a^{c_1}, b]^{f_1}$

elde edilir. Lemma 3.1(ii) den p, q$\in \prod$R olmak üzere $c_1 = pq^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Böylece

$[a^{c_1}, b]^{f_1} = [a^{pq^{-1}}, b^{qq^{-1}}]^{f_1} = [a^p, b^q]^{q^{-1}f_1} = [a^p, b^q]^{f_2}$

dır. Burada $f_2 = q^{-1}f_1$ dır. $p, q \in \prod$R ve a,b$\in R^{t-1}$ için Lemma 3.1(iii) özelliğini birkaç kere uygulanırsa $a^p, b^q \in R^{(t-1)}$ ve m$\in$ G olmak üzere $[k, l]^m$ biçimindeki elemanların çarpımıdır. Böylece [k,l] $\in R^{(t)}$ olduğundan $[a^c, b^d]^f$ elemanını $R^{(t)}$ nin elemanlarıyla eşlenik olan elemanlarının çarpımıdır. Kabul edelim ki x, G nin keyfi bir s-kat komütatörü olsun. Yukarıda görüldüğü gibi x, $R^{(s)}$ nin elemanlarıyla eşlenik elemanlarının çarpımıdır. Hipotezden $R^{(s)}$=1 olduğundan x=1 dir. Bundan dolayı G çözülebilir ve çözülebilirlik uzunluğu $\leq$ s dir.

Not: Yukarıdaki Lemma 3. 2. den G nin herhangi bir R üretecine genelleştirilemez. G nin iki üreteci a ve b ise o zaman a ve b ile üretilen her 2-kat komütatör birime eşit, fakat G çözülebilir olmak zorunda olmayabilir. Ayrıca iki üreteçli bir grup çözülebilir olsa bile çözülebilirlik uzunluğu 2 den büyük olabilir. Burada üreteç kümesinin komütatör kapalı olma özelliğinin önemi ortaya çıktığı görülmektedir.

Örnek

$S_5 =< (1,2,3,4,5), (1,2) >$ Teorem 2.13 den çözülebilir değildir. R=$\{(1,2,3,4,5), (1,2)\}$ S_5 in üreteç kümesi fakat komütatör kapalı değildir. Gerçekten $\sigma = (1,2,3,4,5)$ ve τ = (1,2) olsun.

$[\sigma, \tau] = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\,\tau$ = (1,2,5) ve $[\sigma, \sigma] = [\tau, \tau] = 1$

olduğundan $R' = \{(1), (1,2,5)\}$ ve $R' \nsubseteq$R dir. Böylece R komütatör kapalı değildir. Ayrıca $R^{(2)} = [R', R'] = 1$ dir. Fakat S_5 çözülebilir bir grup değildir.

Örnek

$S_4 =< (1,2,3,4), (2,3) >$ simetrik grubunun R=$\{(1,2,3,4), (2,3)\}$ üreteç kümesidir. Fakat

R'={(1),(1,2,3)} buradan $R' \not\subseteq R$ dır. Böylece R komütatör kapalı küme değildir. Ayrıca $R^2 = 1$ dir. $S_4 \lhd A_4 \lhd V_4 \lhd 1$ olduğundan S_4 çözülebilir bir grup fakat

[(2,3,4),(1,2,4)]=(1,2)(3,4)$\in S_4'$, [(1,2,3,4),(1,2)]=(1,2,4) $\in S_4'$

[(1,2)(3,4), (1,2,4)]=(1,3)(2,4) $\in S_4^{(2)}$ ve böylece $S_4^{(2)} \neq 1$ olduğundan S_4 ün çözülebilirlik uzunluğu 2 den büyüktür.

3.3.Lemma

U=<a> sonsuz devirli grup olsun. Her r> 0 tamsayısı için U nun öyle bir $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ üreteçlerinin sistemi bulunabilir ki bu sistemin bir öz altkümesi U yu üretmez.

İspat

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ keyfi birbirinden farklı asal sayılar ve i=1,2,..,r için $n_i = p_1 p_2 \dots \widehat{p_i} \dots p_r$ [1] olsun. $a_i = a^{n_i}$ olsun. Yani $a_i = a^{p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_r}$ dir. n_i lerin tanımından dolayı $(n_1, n_2, \dots, n_r) = 1$ olduğundan $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_r x_r = 1$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ tamsayıları vardır. Böylece $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_r x_r = 1$ olduğundan $a^{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_r x_r} = a$ dır. Böylece

$a = (a^{n_1})^{x_1} (a^{n_2})^{x_2} \dots (a^{n_r})^{x_r} = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_r^{x_r}$

olduğundan $U = \langle a \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \rangle$ dır. Böylece U yu üreten bir $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ üreteçler sistemi bulunur. i=1,2,…,r için $(n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_r) \neq 1$ olduğundan her $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r$ tamsayısı için

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_{i-1} x_{i-1} + n_{i+1} x_{i+1} + \cdots + n_r x_r \neq 1$

dir. O zaman $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_{i-1}^{x_{i-1}} a_{i+1}^{x_{i+1}} \dots a_r^{x_r} \neq a$ ve böylece $a \notin \langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r \rangle$ olduğundan $U \neq . \langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r \rangle$ dir.

[1] ^ işareti olan terim ihmal edilecektir.

4. ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLARDA DÜZENLİ ÇÖZÜLEBİLİR ALTGRUPLARININ VARLIĞI İÇİN ŞARTLAR

Bu bölümde sonsuz çözülebilir bir grubun, aynı çözülebilirlik uzunluğa sahip bir çözülebilir öz altgrubunun olduğu gösterilecektir. Ayrıca Chernikov olmayan çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir grubun s den küçük veya eşit uzunlukta düzenli çözülebilir altgrubunun varlığı araştırılacaktır.

4.1.Tanım

G çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz çözülebilir bir grup olsun. Eğer G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan her sonsuz altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz bir çözülebilir öz altgrubu varsa G grubuna düzenli çözülebilir grup denir.

4.2.Teorem

G sonsuz çözülebilir grup olsun. Eğer G nin çözülebilirlik uzunluğu s ise o zaman G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir öz altgrubu vardır.

İspat

Kabul edelim ki G nin tüm öz altgruplarının çözülebilirlik uzunluğu s den küçük olsun. O zaman G nin sonlu olduğunu gösterelim. G nin çözülebilirlik uzunluğu s olduğundan $G^{(s-1)} \neq 1$ dir. O zaman $G^{(s-1)}$ in birimden farklı (s-1)-kat komütatörün gösteriminde bulunan elemanlar $a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_{2^{s-1}}$ ve
A=$< a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_{2^{s-1}} >$
olsun. Böylece A nın üreteçlerinin oluşturduğu (s-1)-kat komütatörü birimden farklı olduğu için A nın çözülebilirlik uzunluğu (s-1) den büyüktür. Fakat G nin her öz altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s den küçük olduğundan
G=A=$< a_1, a_2, a_{3,} \dots, a_{2^{s-1}} >$
dir ve böylece G sonlu üreteçli bir gruptur. O halde G=$< g_1, g_2, g_3, \dots, g_m >$ olsun. G/G' sonlu üreteçli abeliyan grup olduğundan Teoremden 2.30. dan dolayı G/G' ya sonsuz ya da bir p asal sayısı için, mertebesi p^n olan devirli grupların çarpımıdır. Yani

$G/G' = < g_1G' > \times < g_2G' > \times \ldots \times < g_mG' >$

şeklinde yazılır. G/G'deki bütün faktörlerinin sonlu devirli grup olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $< g_mG' >$ sonsuz devirli grup olsun. O zaman $\forall$ r>2^{s-1} tamsayısı için Lemma 3.3 de olduğu gibi i=1,2,3,…,r için ve $g_m^{(1)}, g_m^{(2)}, g_m^{(3)}, \ldots, g_m^{(r)}$ r tane elemanı tanımlayalım ve

$U_i = < g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{m-1}, g_m^{(i)}, G' >$

olsun. O zaman $R = \bigcup_{j=1}^{r} U_j$ nin G nin üreteçlerinin komütatör kapalı sistemi olduğunu gösterelim. Gerçekten

$R \subseteq G \;\Rightarrow\; R' \subseteq G' \subseteq U_i \subseteq R \;\Rightarrow\; R' \subseteq R$

dir. Böylece R, G nin komütatör kapalı altkümesidir. Şimdi de G=$< R >$ olduğunu gösterelim. G=$< g_1, g_2, g_3, \ldots, g_m >$ olduğundan $g_m \in R$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Lemmanın 3.3 ispatından

$< g_m > = < g_m^{(1)}, g_m^{(2)}, g_m^{(3)}, \ldots, g_m^{(r)} >$

dir. a, R kümesinin elemanlarından oluştutulan keyfi bir (s-1)-kat komütatör olsun. a nın gösterimi , $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}$ altgrupları tarafından içerilen R nin belirli k (k$\leq 2^{s-1}$) elemanlarından oluşur. k $\leq 2^{s-1} <$ r için $g_m^{(1)}, g_m^{(2)}, g_m^{(3)}, \ldots, g_m^{(r)}$ elemanlarının seçiminden dolayı

$< g_m^{(i_1)}, g_m^{(i_2)}, g_m^{(i_3)}, \ldots, g_m^{(i_k)} > \neq < g^m >$

olduğundan

H=$< U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k} > = < g_1, g_2, g_3, \ldots, g_{m-1}, g_m^{(i_1)}, g_m^{(i_2)}, g_m^{(i_3)}, \ldots, g_m^{(i_k)}, G^{(1)} >$

altgrubu G den farklıdır. H, G nin öz altgrubu ve kabulden dolayı H nın çözülebilirlik uzunluğu s den küçüktür ve böylece a, (s-1)-kat komütatörü olduğundan a birime eşit olmak zorundadır. Böylece R^{s-1}=1 dir. Fakat Lemma 3.2 den dolayı G çözülebilir ve çözülebilirlik uzunluğu s-1 den büyük değildir. Bu ise bir çelişkidir. O halde G/G' sonlu devirli grupların direkt çarpımıdır. Kabul edelim ki

$G > G' > G^{(2)} > \cdots > G^{(t-1)} > G^{(t)} > G^{(t+1)} > \cdots > G^{(s)} = 1$

G nin komütatör altgruplarının serisindeki her bir t için

$G/G', G'/G^{(2)}, \ldots, G^{(t-1)}/G^{(t)}$

faktörleri sonlu olsun. t+1 faktör için doğru olduğunu gösterelim. O zaman $G^{(t)}/G^{(t+1)}$ in sonlu olduğunu göstermek yeterlidir.

Daha önce belirttiğimiz gibi G nin sonlu sayıda üreteci vardır. $G/G^{(t)}$ sonlu olduğundan Teorem 2.33. den $G^{(t)}$ sonlu indeksli altgrubu da sonlu üreteçlidir. Böylece $G^{(t)}/G^{(t+1)}$ abeliyan grubunun periyodik kısmı $B/G^{(t+1)}$ olsun. O zaman $G^{(t)}/B$ sonlu ranklı serbest abeliyan grubu,

$G^{(t)}/B = < a_1B > \times < a_2B > \times \ldots \times < a_lB >$

dir. m, $G/G^{(t)}$ sonlu grubunun mertebesi olsun. Lemma 3.3 ün ispatında olduğu gibi r>2^{s-1} ve (n,m)=1 olacak biçimde n= $p_1p_2 \ldots p_r$ olmak üzere i=1,2,3,…,r için

$n_i = p_1p_2 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_r$

tamsayıları tanımlansın. K = $< B, a_1^n, a_2^n, \ldots, a_l^n >$ ve i=1,2,3,…,r için $K_i = < B, a_1^{n_i}, a_2^{n_i}, \ldots, a_l^{n_i} >$ olsun. G/K sonlu grubu, $G/G^{(t)}$ ile izomorfik olan mertebesi m olan bir grup ile mertebesi n^l olan $G^{(t)}/K$ grubunun genişlemesidir. Yani

G/K / $G/G^{(t)} \cong G/G^{(t)}$

dir. $(n^l, m)=1$ olduğundan bu genişleme ayrışabilir yani G/K da mertebesi m olan bir N/K altgrubu bulunabilir ve

$G/K = G^{(t)}/K \,\lambda\, N/K$

dır. Böylece $R=N\cup(\cup_{i=1}^{r} K_i)$, G nin üreteç sistemidir. Çünkü $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r) = 1$ olduğundan $n_1x_1 + n_2x_2+\ldots+n_rx_r=1$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ tamsayıları vardır ki k=1,2,…,l için $a_k^{n_1x_1+n_2x_2+\cdots+n_rx_r} = a_k$ ise $(a_k^{n_1})^{x_1}(a_k^{n_2})^{x_2} \ldots (a_k^{n_r})^{x_r}= a_k$ olduğundan $< a_k^{n_1}, a_k^{n_2}, \ldots, a_k^{n_r} > = < a_k >$ dır. Ayrıca N altgrup ve i=1,2,3,…,r için K_i, G nin normal altgrubu olduğundan R komütatör kapalı kümedir. R nin keyfi bir (s-1)-kat komütatörü g olsun. k (k≤ 2^{s-1}) dan büyük olmayan N, K_{i_1}, $K_{i_2}, \ldots,$ K_{i_k} altgruplarının belli elemanları g yi oluşturur ve böylece g,

$F= < N, K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_k} > = K_{i_1}K_{i_2} \ldots K_{i_k}N$

altgrubunun bir (s-1)-kat komütatörüdür. $S=K_{i_1}K_{i_2} \ldots K_{i_k}$ olsun. s=1,2,3,…,k için her $K_{i_s} = < B, a_1^{n_{i_s}}, a_2^{n_{i_s}}, \ldots, a_r^{n_{i_s}} >$ alınırsa $u=(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_k})$ olmak üzere

$S=K_{i_1}K_{i_2} \ldots K_{i_k} = < B, a_1^u, a_2^u, \ldots, a_l^u >$

dır. Buradan k≤ $2^{s-1} < r$ için $u=\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} \neq 1$ $(n=p_1p_2 \ldots p_r)$ ve S, K yı içeren $G^{(t)}$ nin öz altgrubudur. $G^{(t)} \cap N = K, F = KN$ bu $G=G^{(t)}N$ nin öz altgrubudur. F altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s den küçüktür. g∈F ve F nin çözülebilirlik uzunluğu s den küçük olduğundan g birime eşittir. Böylece $R^{(s-1)} = 1$ dir. Lemma 3.2. den görülür ki G nin çözülebilirlik uzunluğu s-1 den büyük değildir. Bu bir çelişkidir. Böylece $G^{(t)}/G^{(t+1)}$

sonludur. O halde G nin komütatör altgruplarının serilerinin tüm faktörlerinin sonlu ve böylece G sonludur.

4.3.Sonuç

Çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir grubun tüm öz altgruplarının çözülebilirlik uzunluğu s den küçük ise o zaman grup sonludur.

İspat

G çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir grup ve G nin her öz altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s den küçük olsun. Kabul edelim ki G sonsuz olsun. O zaman Teorem 4.2 den dolayı G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir öz altgrubu vardır bu bir çelişkidir. Bundan dolayı kabul yanlış G sonludur.

4.4.Sonuç

Torsiyonsuz G grubu çözülebilirse o zaman G nin her aşikar olmayan altgrupları düzenli çözülebilirdir.

İspat

Torsiyonsuz G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olsun. Kabul edelim ki aşikar olmayan altgruplarının her öz altgruplarının çözülebilirlik uzunluğu s den küçük olsun. Sonuç 4.3 den dolayı aşikar olmayan altgrupları sonludur. Bu da torsiyonsuz bir grubun her altgrubu sonsuz olması ile çelişir. Bu durum da G grubunun aşikar olmayan altgruplarının bir öz altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s dir. Böylece G grubu düzenli çözülebilirdir.

4.5. Lemma

Çözülebilirlik uzunluğu s olan ve Chernikov olmayan her çözülebilir sonsuz grubun, çözülebilirlik uzunluğu s olan bir sonsuz öz altgrubu vardır.

İspat

G çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz bir çözülebilir grup olsun. Kabul edelim ki G nin her çözülebilirlik uzunluğu s olan öz altgrupları sonlu olsun. O zaman Teorem 4.2 den G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan bir H öz altgrubu vardır. Kabulden dolayı H sonludur kabul edelim ki H nın mertebesi m olsun. Eğer N, G nin herhangi bir sonlu indeksli normal altgrubu ise o zaman G sonsuz ve G/ N sonlu olduğundan N sonsuzdur ve dolaysıyla NH sonsuzdur ve H nın çözülebilirlik uzunluğu s olduğundan NH nin çözülebilirlik uzunluğu s dir. Kabulden dolayı G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan öz altgrupları sonlu olduğundan G=NH dır. $G/N=NH/H\cong H/H\cap N$ ve H nın mertebesi m olduğundan G/N nin mertebesi m den büyük olamaz. Böylece G de sonlu indeksli olacak şekilde minimal altgrubu R vardır. R nin minimalliğinden R nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. Eğer R nin sonlu indeksli bir öz altgrubu K varsa K_G R de sonlu indeksli olur. Ayrıca $K_G \mathrm{char} R \lhd G$ olduğundan $K_G \lhd G$ dir. Bu durumda K_G, G de sonlu indeksli normal altgrubu olur ki bu da G de sonlu indeksli olacak şekilde R nin minimal normal altgrup olması ile çelişir. Böylece R nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. Bu durumda R/R' faktör grubu sonsuzdur ve $R'H$, G nin öz altgrubudur. $R'H$ nın çözülebilirlik uzunluğu s olduğundan $R'H$ sonlu altgruptur. Bu durumdan R nin sonlu indeksli öz altgrubu olmadığından R' sonlu normal altgrubu R nin merkezi tarafından içerilir. Çünkü Teorem 2.45 den

$R / C_R(R') \cong \mathrm{Aut}\, R'$

olduğundan ve R' sonlu olduğundan $\mathrm{Aut}\, R'$ sonludur böylece $R / C_R(R')$ sonludur. R nin sonlu indeksli öz altgrubu olmadığı için $R = C_R(R')$ dir. Böylece $R' \leq Z(R)$ dir.

Böylece $R' \leq Z(R)$ ve

$a^{-1}b^{-1}ab\, Z(R) = Z(R) \Rightarrow ab\, Z(R) = ba\, Z(R)$

olduğundan $R / Z(R)$ abeliyandır.

$Z(R / Z(R)) = R / Z(R) = Z_2(R)/Z(R)$ olduğundan $Z_2(R) = R$ dir. Böylece R nilpotenttir. R' komütatör altgrubu sonlu olduğundan Teorem 2.41 den FC gruptur ve G/R faktör grubu sonlu olduğundan, herhangi bir $g\in R$ elemanını için g yi içeren G nin bir sonlu üreteçli $U\subset R$ normal altgrubu vardır. U sonsuz olamaz çünkü o zaman U sonsuz ise G=UH olur ve buradan U=R bulunur ki imkansızdır, çünkü U sonlu sayıda üreteçli nilpotent gruptur ve R nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. Bu yüzden U sonludur ve böylece R periyodik gruptur. R periyodik, nilpotent grup ve sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. O zaman R abeliyan olmalıdır. R nin asal mertebeli elemanlarının kümesi C olsun. O zaman C sonludur. Bu durumda $< C >H$ sonludur ve çözülebilirlik uzunluğu s dir. O zaman R altgruplar için minimal şartını sağlayan abeliyan gruptur. O zaman G Chernikov gruptur. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış ve böylece G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir sonsuz öz altgrubu vardır.

4.6.Sonuç

Sonsuz çözülebilir bir grubun birimden farklı divisible altgrubu yoksa düzenli çözülebilirdir.

İspat

G bir sonsuz düzenli çözülebilir grup olsun. G nin birimden farklı divisible altgrubu yoksa G Chernikov grup degildir. Lemma 4.5 den düzenli çözülebilirdir.

Örnek

G grubu mertebesi p olan devirli grup ile R quasidevirli p-grubunun çelenk çarpımı olsun.
U normal sonsuz elemanlı bir p grubu olmak üzere,
$G=U\lambda R$
bir yarı-direkt çarpımıdır. Teorem 2.18. den U ve R, G nin iki abel altgrubu ve G=UR olduğundan G nin çözülebilirlik uzunluğu 2 dir. G nin bir abeliyan olmayan keyfi sonsuz altgrubu H olsun. Eğer $UH\neq G$ ise H altgrubunun divisible altgrubu yoktur ve Sonuç 4.6 dan H düzenli çözülebilirdir. Eğer UH=G ise H abeliyan olmadığı için G nin merkezi birim olduğundan H nin aşikar olmayan normal altgrubu $U\cap H$ sonsuzdur. $H/(H\cap U) \cong UH/U \cong UR/U \cong R/(U\cap R)$ faktör grubu quasidevirli gruptur, H sonsuz abeliyan olmayan bir öz altgrupları içerir. Böylece G düzenli çözülebilirdir.

4.7.Lemma

Sonlu üreteçli bir U grubunun komütatör altgrubu sonsuz Chernikov grup olamaz.

İspat

Kabul edelim ki U grubunun komütatör altgrubu U' sonsuz Chernikov grup ve R de U' nün maksimal divisible altgrubu olsun. O zaman U' Chernikov olduğundan U'/R sonludur. Ayrıca $(U/R)/(U'/R) \cong U/U'$ olduğundan U/R faktör grubu sonlu U'/R grubunun sonlu üreteçli abeliyan grup genişlemesidir. Böylece U/R de sonlu indekse sahip bir torsiyonsuz B/R altgrubu vardır. U sonlu üreteçli ve |U:B| sonlu olduğundan Teorem 2. 33. den dolayı B de sonlu üreteçlidir. Üstelik R abeliyan altgrup ve

$B/R \cong (BU')/U' \subseteq U/U'$

olduğundan B/R de abeliyandır. Böylece B çözülebilir ve çözülebilirlik uzunluğu 2 dir. O zaman Tanım 2. 8. den B residually sonlu dolaysıyla R residually sonludur. Fakat R divisible altgrup olduğundan R =1 dir. U Chernikov ve R=1 olduğundan U sonludur. Bu ise U nun sonsuz olması ile çelişir. Böylece kabul yanlış U sonsuz Chernikov grup olamaz.

4.8.Lemma

G çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir grup olsun. Eğer G Chernikov grup değilse o zaman G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

İspat

G nin çözülebilirlik uzunluğu s olduğundan G nin komütatör serisi

$G^{(0)} = G \supset G^{(1)} \supset \cdots \supset G^{(t)} \supset G^{(t+1)} \supset \cdots \supset G^{(s)} = 1$

Ve ayrıca G Chernikov olmadığı için öyle bir $t \geq 0$ vardır ki $G^{(t)}$, G nin komütatörler serisinin Chernikov olmayan son terimi olsun. Eğer G nin düzenli çözülebilir altgrubu yoksa o zaman Lemma 3.5. dan G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir sonlu altgrubu vardır. Bu altgrup K olsun.

Kabul edelim ki $G^{(t)}$ nin bir sonsuz mertebeli x elemanı ve $R = \langle k^{-1}xk : k \in K \rangle$ olsun. K sonlu olduğundan R nin sonlu sayıda üreteci vardır. O zaman $R \lhd \langle x.K \rangle$ ve $x \in R$ dir. R nin R' komütatör altgrubu $G^{(t+1)}$ tarafından içerilir ve kabulden $G^{(t+1)}$ Chernikov grup olduğundan R' bir Chernikov gruptur. Fakat o zaman Lemma 3.7. den R' sonludur. Böylece

RK=<x,K> altgrubunun birimden farklı divisible altgrubu yoktur. Sonuç 3.6. dan RK çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir grupdur.

Şimdi de $G^{(t)}$ nin sonsuz mertebeli elemanı olmasın. $G^{(t)}/G^{(t+1)}$ grubunun asal mertebeli bütün elemanları tarafından üretilen $S/G^{(t+1)}$ altgrubu sonlu değildir. Eğer sonlu olursa o zaman $G^{(t)}$ Chernikov olur ki bu bir çelişkidir. S de $G^{(t+1)}$ in merkezleyeni $B=C_S(G^{(t+1)})$ olsun. Teorem 2.30. dan Chernikov grubun otomorfizmalarının periyodik grubu Chernikov ve $S/B \hookrightarrow Aut\, G^{(t+1)}$ olduğundan S/B Chernikovdur ve B Chernikov grup değildir.

$B/ B\cap G^{(t+1)} \cong G^{(t+1)}B /G^{(t+1)} \subseteq G/G^{(t+1)}$ (4)

ve Chernikov olmadığından $B/ B\cap G^{(t+1)}$ sonsuz abeliyan gruptur. $B\cap G^{(t+1)}$, B nin merkezi tarafından içerilir. Böylece B nin nilpotentlik uzunluğu 2 dir. n=1,2,… için

$B=F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n \times \ldots$ (5)

B nin Sylow p_n-altgruplarının çarpımı olsun. Eğer faktör sayısı sonsuzsa , A_n ler F_n merkezinin alt sınırı (the lower rimi) olmak üzere

$A=A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$

altgrubunun divisible altgrubu yoktur ve Lemma 4.5den AK düzenli çözülebilirdir. Son olarak birimden farklı (5) in genişlemesimdeki faktör sayısı sonlu olduğu durumu göz önüne alalım. (4) de olduğu gibi F_n sınıfı 2 olan bir nilpotent grup ve derecesi p_n olan her elemanı merkezi tarafından içerildiği için F_n grubunun F_n' komütatör altgrubunun bütün elemanlarının mertebesi p_n dir. Eğer B' komütatörü sonsuz ise $B'K$ sonsuz altgruptur. Fakat eğer B' sonlu ise B Chernikov olmadığı için B/B' nün, bütün asal mertebeli elemanları tarafından üretilen D/B' altgrubu sonsuzdur. Bu durumda D altgrubunun birimden farklı divisible altgrupları yoktur. Bu ise DK nın çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir olması anlamına gelir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

4.9.Teorem

G çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir fakat Chernikov olmayan bir grup olsun. O zaman G nin t=1,2,…,s için çözülebilirlik uzunluğu t olan düzenli çözülebilir altgrupları vardır.

İspat

G, Chernikov olmayan ve çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir grup olsun. O zaman G nin ardışık komütatör serisi

$G^{(0)} = G \supset G^{(1)} \supset \cdots \supset G^{(s-t)} \supset \cdots \supset G^{(s)} = 1$

olsun. O zaman $G^{(s-t)}$ grubunun çözülebilirlik uzunluğu t dir. Eğer $G^{(s-t)}$ Chernikov olmayan grupsa Lemma 3.8 den çözülebilirlik uzunluğu t ona bir düzenli çözülebilir altgrubu vardır. Şimdi de $G^{(s-t)}$ Chernikov grup olsun. Aşağıdaki muhtemel durumları göz önüne alalım.

1.Durum

G, sonlu mertebeli bir g elemanını içersin. Bu durumda $G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$ faktör grubunun sonlu ve sonsuz olma durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) $G^{(s-t)} / G^{(s-t+1)}$ sonlu ve H = $G^{(s-t)}$<g> olsun.

$H / G^{(s-t+1)}$ faktör grubu $G^{(s-t)} / G^{(s-t+1)}$sonlu normal altgrubunun bir genişlemesidir $gG^{(s-t+1)}$ elemanı $G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$ de sonlu mertebeli otomorfizma tanımlar ve böylece bir n tamsayıları için $g^n G^{(s-t+1)}$ ile $G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$ grubunun elemanları ile değişmelidir. Gerçekten

$G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)} \triangleleft H/ G^{(s-t+1)}$ ve $gG^{(s-t+1)} \in H/ G^{(s-t+1)}$ dir. Böylece

$\varphi_g : G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)} \rightarrow G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$

$\qquad xG^{(s-t+1)} \rightarrow x^g G^{(s-t+1)}$

bir otomorfizmadır. Ayrıca

$\varphi^2\left(xG^{(s-t+1)}\right) = \varphi(\varphi\left(xG^{(s-t+1)}\right) = \varphi\left(x^g G^{(s-t+1)}\right) = (x^g)^g G^{(s-t+1)} = x^{g^2} G^{(s-t+1)})$

$\varphi^3\left(xG^{(s-t+1)}\right) = \varphi(x^{g^2} G^{(s-t+1)}) = x^{g^3} G^{(s-t+1)}$ olduğundan bu şekilde devam edilirse $k \geq 1$ tamsayısı için

$\varphi^k\left(xG^{(s-t+1)}\right) = \varphi\left(x^{g^k} G^{(s-t+1)}\right) = x^{g^k} G^{(s-t+1)}$

dır.

g, G nin sonlu mertebeli bir elemanı olduğundan o(g)= n olacak şekilde n tamsayısı vardır. Böylece

$\varphi^n(xG^{(s-t+1)}) = x^{g^n}G^{(s-t+1)})$=x$G^{(s-t+1)}$ ise $\varphi^n = 1$ dir. Böylece öyle bir n tamsayısı vardır ki

$1=(\varphi_g)^n \Rightarrow x^{g^n}G^{(s-t+1)} = xG^{(s-t+1)} \Rightarrow g^n x(g^n)^{-1}G^{(s-t+1)} = xG^{(s-t+1)}$

$\Rightarrow g^n xG^{(s-t+1)} = xg^nG^{(s-t+1)} \Rightarrow (g^nG^{(s-t+1)})(xG^{(s-t+1)}) = (xG^{(s-t+1)})(g^nG^{(s-t+1)})$

$G^{(s-t)} < g^n >/G^{(s-t+1)}$ faktör grubu abeliyandır ve

$H_1 = G^{(s-t)} < g^n > \supset \cdots \supset G^{(s-t+1)} \supset \cdots \supset G^{(s)} = 1$

alt normal serisinin her bir faktörü abeliyan olan H_1 grubunun bir normal serisidir. Böylece H_1 altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu t den büyük değildir. Fakat $G^{(s-t)}$ çözülebilirlik uzunluğu t olduğundan, H_1 in çözülebilirlik uzunluğuda t dir. Böylece Lemma 3.8 den H_1 Chernikov olmayan grubunun bir t çözülebilirlik uzunluğundan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

b) $G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$ sonsuz olsun.

$G^{(s-t})$ bir Chernikov grup olduğundan $G^{(s-t)}/G^{(s-t+1)}$ in sonlu indeksli bir divisible abeliyan altgrubu R/$G^{(s-t+1)}$ vardır. R nin çözülebilirlik uzunluğu t-1 olsun. <g>$G^{(s-t)}$/R grubu $G^{(s-t)}$/R sonlu normal altgrubunun genişlemesidir. a) dan dolayı öyle bir n vardır ki [g^n, $G^{(s-t)}$] ⊆R dir ve benzer yöntemle $G^{(s-t)} < g^n >$ çözülebilirdir ve çözülebilirlik uzunluğu t dir. Lemma 3.8 den bu grubun t çözülebilirlik uzunluğundan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

Şimdi R nin çözülebilirlik uzunluğu t olsun. R/$G^{(s-t+1)}$ divisibledır ve Chernikov olduğundan R/$G^{(s-t+1)}$ nin bir N/$G^{(s-t+1)}$sonlu karakteristik altgrubu bulunabilir öyle ki N nin çözülebilirlik uzunluğu t dir. Benzer şartlar altında a) dan t çözülebilirlik uzunluğundan düzenli çözülebilir altgrup vardır.

2.Durum

G grubunun sonlu mertebeli elemanı olmasın. G nin komütatör serisinin Chernikov olmayan en son terimi $G^{(k-1)}$ grubu olsun. $G^{(k-1)}/G^{(k)}$nın asal mertebeli bütün elemanlarının ürettiği altgrubu $S/G^{(k)}$ ile gösterilsin.$S/G^{(k)}$ sonsuzdur. $S/G^{(k)}$ sonlu ise

$G^{(k)}$ Chernikov olduğundan S Chernikovdur. Bu ise bir çelişkidir. $N_0 = G^{(k)}$ olsun. Kabul edelim ki G nin $g_1, g_2, \dots, g_l$ elemanları $N_i =< N_0, g_1, g_2, \dots, g_i >$ altgruplarının

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l \qquad (6)$$

kesin artan zincirini oluştursun ve her bir i=1,2,…,l için g_{g_i} elemanı ile N_{l-1} in bütün elemanları ile değişmeli olsun. (6) dizisinin sınırsız biçimde genişlediğini gösterelim. S nin N_l normal altgrubunun merkezleyeni B=$C_S(N_l)$ olsun. S/B faktör grubu Chernikovdur ve sonludur. B Chernikov değilse B∩N_l Chernikov gruptur, B/B∩ N_l faktör grubu Chernikov değildir ve sonsuzdur. $g_{l+1} \in$ B/B∩ N_l olsun.

$N_l \neq < N_l, g_{l+1} > = N_{l+1}$ve N_l nin tüm elemanları ile g_{l+1} değişmelidir. Böylece (6) dizisi sınırsız olarak artar. K=< $G^{(k-1)}, g_1, g_2, \dots, g_{l+1}$ > çözülebilirlik uzunluğu t ve Chernikov değildir. Ek olarak N=< $G^{(k)}, g_1, g_2, \dots, g_l$,…> Chernikov değildir. Burada R$/G^{(k)}$ faktör grubu Chernikov değildir ve

R$/ G^{(k)}$ =K$G^{(k)}/G^{(k)} \cong K/K \cap G^{(k)}$

$K/K \cap G^{(k)}$ Chernikov değildir. Böylece K Chernikov olamaz. Dolaysıyla Lemma 3.8. den K altgrubunun bir t çözülebilirlik uzunluğundan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

4.10 Sonuç

G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s (s≥2) olan bütün sonsuz çözülebilir altgruplarının en az bir düzenli çözülebilir altgruba sahip olması için bütün çözülebilir uzunluğu s-1 olan G nin bütün sonsuz altgruplarının düzenli çözülebilir olmasıdır.

İspat

U, G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan herhangi bir sonsuz altgrubu olsun. Eğer U altgrubu düzenli çözülebilir değilse o zaman U nun çözülebilirlik uzunluğu s olan bir sonsuz B altgrubu vardır öyle ki B altgrubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan bütün öz altgrupları sonludur. O zaman. Teorem 4.9 dan dolayı B Chernikov dur. Fakat bu durumda B nin öyle bir çözülebilirlik uzunluğu s-1 olan asal indeksli R altgrubu vardır. R çözülebilirlik uzunluğu s-1 olan sonsuz Chernikov gruptur. O zaman Teorem 4.9 dan R düzenli çözülebilir olamaz.

4.11 Sonuç

G nin her sonsuz çözülebilir altgrupları düzenli çözülebilir olması için gerek ve yeter şart G nin quasidevirli altgrubunun olamamasıdır.

İspat

Eğer G grubu düzenli çözülebilir değilse Teorem 4.9. dan G Chernikovdur. Bu durumda G nin bir quasidevirli altgrubu vardır.

Kabul edelimki G nin quasidevirli altgrubu olmasın. O zaman G nin Chernikov değildir. Teorem 4.9. dan G düzenli çözülebilirdir.

Böylece bir sonsuz abeliyan grubu düzenli çözülebilir olması için gerek ve yeter şart altgrupların quasidevirli altgrupları içermemelidir.

Eğer bir grup düzenli çözülebilir olması için her zaman sonsuz altgrupları düzenli çözülebilir gerekmez.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLARDA DÜZENLİ ÇÖZÜLEBİLİR ALTGRUPLARIN VARLIĞI İÇİN ŞARTLAR

Bu bölümde verilecek olan teoremler bir önceki kısımda verilen temel sonuçlarının bir genellemesidir.

5.1.Teorem

G bir radikal grup olsun. Eğer G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s>0 olan bir altgrubu varsa o zaman G grubunun ya uzunluğu s olan düzenli çözülebilir alt grubu vardır ya da G grubu Chernikov dur.

İspat

1) Önce kabul edelim ki G çözülebilir olmayan sayılabilir lokal sonlu p-grubu olsun.

Bu durumda G_1, G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir altgrubu olmak üzere, G grubu
$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k \subset \cdots$
şeklinde sonlu altgruplarının sayılabilir zincirinin birleşimi olarak yazılabilir. C_k, G_k nın merkezinin üst sınırı olsun ve
$H = \langle G_1, G_2, \dots, G_k, \dots \rangle$
altgrubunu göz önüne alalım. O zaman H çözülebilir ve çözülebilirlik uzunluğu s dir. Eğer H sonsuz ise açıkça H Chernikov değildir ve Teorem 4.9 dan H bir çözülebilirlik uzunluğu s olan bir altgrubu içerir. Fakat H sonlu ise o zaman H nın
$\langle C_1, C_2, \dots, C_k, \dots \rangle$
altgrubuda sonludur. G nin merkezi Z_1 olsun. Z_1 birimden farklıdır. G nin
$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots \subset Z_\beta \subset \cdots$
yukarı merkez serisi bir γ ordinali ile sınırlıdır. Eğer Z_γ çözülebilir grup ise o zaman G nin bir çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir bir altgrubu olduğunu gösterelim. Kabulden dolayı G sayılabilir çözülebilir olmayan lokal sonlu p-grubu olduğundan G/Z_γ bölüm grubuda bu özelliklere sahiptir ve G/Z_γ bölüm grubunun merkezi aşikar olduğundan G/Z_γ çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrubu içerir. Bu altgrup L/Z_γ olsun. L altgrubu Chernikov olmayan, çözülebilir bir altgruptur böylece

Teorem 4.9. dan dolayı çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrup içerir. Şimdi de kabul edelim ki Z_γ çözülebilir grup olmasın ve Z_α, G nin yukarı merkez zincirinin çözülebilir olmayan ilk terimi olsun. Eğer en az αdan küçük bir β ordinali için Z_β Chernikov değil ise o zaman Teorem 4.9. dan dolayı Z_β nın düzenli çözülebilir altgrubu vardır. Şimdi de $\beta < \alpha$ olan her β için Z_β Chernikov ve R de Z_α nın maksimal quasi-divisible altgrubu olsun. [3] den dolayı bu durumda R abeliyandır. $\beta < \alpha$ için Z_β Chenikov grup ve R de Z_α nın maksimal quasi-divisible abeliyan altgrubu olduğundan $Z_\beta/(Z_\beta \cap R) \cong Z_\beta R/R$ sonludur. Böylece $\overline{Z_\alpha} = Z_\alpha/R$ bölüm grubu sonlu normal altgrupların artan dizisinin birleşimidir. $\overline{Z_\alpha}$ nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir maksimal $\overline{N}$ altgrubu sonlu olamaz. Gerçekten eğer $\overline{N}$ sonlu ise $\overline{N} \subset \overline{Z_\beta}$ olduğundan $\overline{Z_\alpha}$ nin normal altgrubu $\overline{Z_\beta}$ altgrubunun merkezi $Z(\overline{Z_\beta})$ sonsuz olduğundan $\overline{g} \in B(\overline{B_\beta})/\overline{N}$ elemanı vardır. $<\overline{N}, \overline{g}>$ alt grbunun çözülebilirlik uzunluğu s dir ve bu grup $\overline{N}$ den farklı olduğundan bu $\overline{N}$ nin çözülebilirlik uzunluğu s olan maksimal altgrup olması ile çelişir. Böylece Teorem 4.9. dan $\overline{N}$ nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir bir altgrubu vardır.

2) Şimdi de kabul edelim ki G çözülebilir olmayan lokal nilpotent grup ve R de G nin sonlu üreteçli çözülebilirlik uzunluğu s olan altgrubu olsun.

O zaman G nin bir sonsuz mertebeli x elemanı vardır. O zaman R 1. durumdaki gibi tanımlanmak üzere <R,x> Chernikov grup olmadığından Teorem 4.9 dan dolayı <R,x> grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrubu vardır. Şimdi G nin periyodik olma durumunu göz önüne alalım. Bu durumda G grubu i=1,2,... olmak üzere F_i Sylow altgruplarının direkt çarpımı yani

$G = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k \times \ldots$

şeklinde yazabiliriz. Eğer G nin açılımındaki Sylow altgruplarının sayısı sonsuz ise bir k tamsayısı vardır öyle ki m>k için $R \cap F_m = 1$ dir. Her m>k için her bir F_m Sylow altgrubu içinden bir f_m elemanı seçelim.

$<R, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots>$

altgrubu çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir grup ve Chernikov grup değildir. O zaman Teorem 4.9. dan bu altgrubun çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrubu vardır. Fakat G nin açılımındaki Sylow altgruplarının sayısı sonlu ise o zaman Sylow altgruplarından biri çözülebilir değildir. Eğer G nin bütün Sylow altgrupları çözülebilir ise G nin kendisi çözülebilir grup olması gerekir bu hipotezle çelişir. O halde G nin Sylow altgruplarından biri çözülebilir değildir. Genelliği bozmadan bu çözülebilir olmayan Sylow altgrubunu F_1 olarak alabiliriz. F_1 çözülebilir olmadığından F_1 de bir sayılabilir çözülebilir olmayan altgrup bulabiliriz. O zaman 1. Durumdan dolayı çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrup vardır.

3) Şimdi de G grubu bir radikal grup olsun.

Radikal grubun tanımından G nin faktörleri lokal nilpotent olan
$R_0 = 1 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_x \subset R_\gamma = G$
şeklinde bir artan serisi vardır. Kabul edelim ki G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir alt gubu olmasın. O zaman G nin bir Chernikov grup olduğunu gösterelim. Bunun için Teorem 4.9. dan çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir grup Chernikov değil ise çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu olduğundan G nin çözülebilir grup olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk önce G nin herhangi bir çözülebilir R altgrubunun Chernikov olduğunu gösterelim. Gerçekten teoremin hipotezinden G bir çözülebilirlik uzunluğu s olan N çözülebilir altgrubunu içerir. O zaman R ve N çözülebilir grup olduğundan RN de çözülebilir grup ve kabulden dolayı G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu olmadığı için Teorem 4.9. dan dolayı RN Chernikov gruptur. RN Chernikov olmasa RN nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu dolaysıyla G nin böyle bir altgrubu olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde RN Chernikov olduğundan R de Chernikov gruptur.

D, G nin maksimal quasi-divisible altgrubu olsun. D nin lokal nilpotent radikali L olsun. L nin çözülebilir grup olduğu 2.durumun ispatındaki gibi yapılır. Eğer L Chernikov grup değilse o zaman Teorem 4.9. dan dolayı L nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu, dolayısıyla G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu vardır bu ise bir çelişkidir. O halde L bir Chernikov gruptur. Sonuç olarak L nin bir birimden farklı sonlu karakteristik F altgrubu vardır. D bir quasi-divisible grup olduğundan F, D nin merkezi tarafından içerilir. Böylece D nin merkezi $Z_1 \supseteq F \neq 1$ olduğundan Z_1 birimden farklıdır. Eğer $D \neq Z_1$ ise D/Z_1 in merkezi Z_2/Z_1 grubuda benzer şekilde birimden farklıdır. Böylece Teorem 2.16. dan (Grün's lemmasından) dolayı D abeliyandır. Böylece G nin maksimal quasi-divisible altgrubu D abeliyandır.

Şimdi de G/D nin sonlu olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki G/D sonsuz olsun. Bu durumda 2.durum kullanılırsa ve G/D radikal grup ve G nin maksimal quasi-divisible altgrubunun D olduğu göz önüne alınırsa $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{D}$ nin $\overline{\mathrm{S_k}}$ sonlu çözülebilir normal altgruplarının

$$\overline{\mathrm{S_1}} \subset \overline{\mathrm{S_2}} \subset \cdots \subset \overline{\mathrm{S_k}} \subset \cdots \subset \overline{\mathrm{S_w}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{S_k}$$

şeklinde bir artan zincirini bulabiliriz. $\overline{\mathrm{S_w}}$ nin maksimal çözülebilirlik uzunluğu s olan altgrubu $\overline{\mathrm{S}}$ olsun. $\overline{\mathrm{S}}$, 1.durumun ispatından dolayı sonsuz olduğu gösterilebilir. Böylece $\overline{\mathrm{S}}$ grubu Chernikov değildir. $\overline{\mathrm{S}}$ Chernikov olmayan, çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir grup olduğundan Teorem 4.9. dan dolayı $\overline{\mathrm{S}}$ nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu vardır. Fakat bu bir çelişkidir. Dolaysıyla G/D sonludur. Böylece G bir radikal çözülebilir bir gruptur.

5.2.Sonuç

G bir radikal grup ve G çözülebilirlik uzunluğu s olan bir çözülebilir altgrubu olsun. O zaman G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrup içermesi için gerek ve yeter şart G nin bir düzenli abeliyan altgrup içermesidir. Burada düzenli abeliyan altgrup çözülebilirlik uzunluğu 1 olan bir düzenli çözülebilir grup anlamındadır.

İspat

Kabul edelim ki G grubu çözülebilirlik uzunluğu s olan bir düzenli çözülebilir altgrup içersin. O zaman Teorem 5.1. den dolayı G Chernikov grup olamaz. Böylece Teorem 4.9. dan dolayı G düzenli abeliyan altgrup içerir. Karşıt olarak G nin düzenli abeliyan bir altgrubu olsun. G radikal grup olduğundan Teoremi 5.1. in 3. durumundan G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

5.3.Sonuç

G radikal grubunun çözülebilirlik uzunluğu s>0 olan çözülebilir altgrubu olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

1) G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

2) i>0 tamsayısı olmak üzere G_i ler G nin aynı s çözülebilirlik uzunluğuna sahip çözülebilir altgrupları olmak üzere G nin

$G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_k \supset \cdots$

şeklinde bir azalan zinciri vardır.

3) G bir Chernikov grup olamaz.

İspat

(1⇒2) Önce G grubunun çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir bir altgrubu olsun. O zaman Teorem 5.1. den dolayı G grubu Chernikov grup olamaz dolayısıyla G 2. şartını sağlar.

(2⇒3) Şimdi de G grubu 2. şartını sağlasın. Eğer G grubu Chernikov grup ise G grubu minimal şartını sağlar bir m>0 için

$G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_k \supset \cdots \supset G_m = G_{m+1}$

olduğundan kabul yanlış o halde G Chernikov gruptur.

(3⇒1) G Chernikov grup olmasın. O zaman Teorem 4.9. dan G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgrubu vardır.

Yukarıdaki sonucun 2 ve 3.şartlarının denkliği şu şekilde ifade edilir. G nin çözülebilirlik uzunluğu s olan çözülebilir altgrupları için azalan zincir şartını sağlaması için gerek ve yeter şart G nin bütün altgruplarının azalan zincir şartını sağlamasıdır yani minimal şartının sağlamasıdır.

5.4.Sonuç

Bir çözülebilir olmayan radikal grup her s=1,2,.. için çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz çözülebilir altgrubu vardır.

İspat

Bu sonuç Teorem 5.1. in 3. durumundan açıktır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada D.I.Zaicev'in "Stably Solvable Groups" başlıklı makalesi çalışılmıştır. Çözülebilir gruplarda çözülebilirlik uzunluğu s olan düzenli çözülebilir altgruplarının olması için şartlar belirlenmiştir. Teorem 4.2. den çözülebilirlik uzunluğu s olan sonsuz bir grupta çözülebilirlik uzunluğu s olan bir öz altgrubun varlığından bağımsız olarak sonuç ispatlanmıştır. Teorem 5. 1. in ispatına dayanan beşinci bölüm dördüncü bölümde verilen radikal gruplarda sonucunun önemli bir genellemesi yapılmıştır. Yaptığımız çalışmanın konuyla ilgilenenlere bir basamak oluşturması ümidini taşıyoruz.

KAYNAKLAR

1. Asar A. O., Arıkan A., Arıkan A.(2009), Cebir, *Ankara: Eflatun*

2. Bayar E. (1986), Gruplar teorisi, *Trabzon*, 90-99

3. Kuros A. G. (1953), The Theory of Groups (çev. Chelsea (1955), New York), 2nd ed, GITTL, *Moskow*, 15,501

4. Robinson, D. J. S. (1972) , Finiteness conditions and generalized soluble groups, Part1, *Berlin: Springer*

5. Robinson, D.J. S. (1972) , Finiteness conditions and Generalized Soluble Groups, Part2, *Berlin: Springer*

6. Robinson, D. J. S. (1982) , A Course in the Theory of Groups, *New York: Springer-Verlag*

7. Zaicev, D. I. (1969) , Stably solvable groups, Math. USSR-İzvestija, 723-736

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: YILMAZ, Sare
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 02.05.1988 Çorlu
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (555) 813 4205
e-mail	: sareyilmaz003@gmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2010
Lise	Fatih Sultan Mehmet Lisesi	2005

Yabancı Dil

İngilizce

GAZİ GELECEKTİR...