LUPAŞ OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Hamza AKKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2013
ANKARA

Hamza AKKAYA tarafından hazırlanan "LUPAŞ OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN ………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI ………………….
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN ………………….
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Esra KIR ARPAT ………………….
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 21/02/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hamza AKKAYA

LUPAŞ OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH TİPLİ GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Hamza AKKAYA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2013

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde lineer pozitif operatörler ile ilgili genel bilgi ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Lupaş operatörlerinin bir genelleşmesi olan $L_n^*(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri hem Bohman-Korovkin teoremi hem de ağırlıklı Korovkin teoremi yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım hızları ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, $L_n^*(f;x)$ operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi olan $K_n(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri Bohman-Korovkin teoremi yardımıyla incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde ise $K_n(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım hızları; süreklilik modülü, lokal Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, türevin süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla elde edilmiştir.

Bilim Kodu	**:**	**204.1.095**
Anahtar Kelimeler	**:**	**Lineer pozitif operatörler, Kantorovich tipi operatör, süreklilik modülü, lokal Lipschitz sınıfından fonksiyon, ağırlıklı süreklilik modülü, türevin süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli.**
Sayfa Adedi	**:**	**52**
Tez Yöneticisi	**:**	**Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN**

APPROXIMATION PROPERTIES OF KANTOROVICH TYPE GENERALIZATION OF LUPAŞ OPERATORS

(M.Sc. Thesis)

Hamza AKKAYA

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2013

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter, has been allocated to the introduction. In the second chapter, general information and theorems about the linear positive operators are given. In the third chapter, $L_n^*(f;x)$ operators which are the generalization of the Lupaş operators are introduced and some approximation properties of these operators are investigated with the help of both Bohman-Korovkin theorem and weighted Korovkin type theorem. Furthermore, rates of approximation of these operators are obtained by using weighted modulus of continuity. In the fourth chapter, some approximation properties of $K_n(f;x)$ operators which are the Kantorovich type of generalization of $L_n^*(f;x)$ operators are examined by using Bohman-Korovkin theorem. Finally, in the fifth chapter, the rates of approximation of these operators are obtained by means of modulus of continuity, the elements of local Lipschitz class , modulus of continuity of derivative and Peetre's K functional.

Science Code	**:**	**204.1.095**
Key Words	**:**	**Linear positive operators, Kantorovich type operator, modulus of continuity, the function of local Lipschitz class, weighted modulus of continuity, modulus of continuity of derivative, Peetre's K-functional.**
Page Number	**:**	**52**
Advisor	**:**	**Assoc. Prof. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN**

TEŞEKKÜR

İlk olarak, çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, özverili ve içtenlikle bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli Hocam Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN'a , bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan, maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Selma'ya ve çalışmalarım nedeniyle daha fazla mesai yapmak zorunda kalan iş arkadaşlarım Tevfik, Abdullah ve Murat'a en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	**Açıklama**
$L(f;x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar kümesi
$f_n \rightrightarrows f$	$\left(f_n\right)$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$C\left[a,b\right]$	$\left[a,b\right]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$\left\Vert\cdot\right\Vert_{C[a,b]}$	$C\left[a,b\right]$ uzayında $\left\Vert f\right\Vert_{C[a,b]} = \max\limits_{a\le x\le b}\left\vert f\left(x\right)\right\vert$ ile tanımlı olan norm
B_ρ	$\left\vert f\left(x\right)\right\vert \le M_f\,\rho\left(x\right)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
C_ρ	B_ρ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
C_ρ^*	C_ρ uzayında $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left\vert f\left(x\right)\right\vert}{\rho\left(x\right)} < \infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\left\Vert\cdot\right\Vert_\rho$	C_ρ ve B_ρ uzayları üzerinde $\left\Vert\cdot\right\Vert_\rho = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\dfrac{\left\vert\cdot\right\vert}{\rho(x)}$ ile tanımlı norm
$\Omega\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü

Simge	**Açıklama**
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega(f';\delta)$	f' fonksiyonunun süreklilik modülü
lokal $Lip_m(\alpha)$	Lokal Lipschitz sınıfından fonksiyonlar uzayı
$C'[a,b]$	$[a,b]$ deki differensiyellenebilir fonksiyonların uzayı
$K(f;\delta_n)$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$\lVert\cdot\rVert_{C^2[a,b]}$	$\lVert f\rVert_{C^2[a,b]} = \lVert f\rVert_{C[a,b]} + \lVert f'\rVert_{C[a,b]} + \lVert f''\rVert_{C[a,b]}$ ile tanımlı norm
$C^2[a,b]$	f, f' ve $f'' \in C[a,b]$ olacak şekildeki fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında daha kolay bilgi elde etmenin bir yolunu verir. Bu nedenle 1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir, [1]. Bu ifade yaklaşımlar teorisinin temelini teşkil etmektedir. Daha sonra 1912 yılında Bernstein, Weierstrass'ın bu ifadesinin bir ispatı olarak, bir f fonksiyonuna yakınsayan polinomları, toplam biçiminde lineer operatörler dizisi şeklinde göstermiş ve böylece lineer operatörler teorisinin oluşmasını sağlamıştır, [2]. 1951 yılında Bohman lineer pozitif operatörlerin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir, [3]. Daha sonra 1953 yılında Korovkin, Bohman'ın bu ifadesini $[a,b]$ aralığına genellemiştir, [4]. Bohman ve Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Bu teoremlerin şartlarını sağlayan çok sayıda operatör tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bununla beraber Lupaş operatörleri gibi birçok operatör sınırsız aralıklarda tanımlandıklarından bu operatörlerin yaklaşımı ancak ağırlıklı uzaylarda sağlanabilmektedir. Lupaş, [5], tarafından

$$L_n(f;x) = 2^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{2^k\, k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \geq 0 \qquad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan $L_n(f;x)$ operatörlerinin $[a,b]$, $(\mathrm{b}>0)$ kapalı ve sınırlı aralığındaki yaklaşım özelliklerini Agratini, [6], incelemiş ve bu operatörler için bir Voronovskaja tip formül elde etmiştir. Ayrıca bu operatörlerin Kantorovich tipli genelleşmesini

$$K_n^*\left(f;x\right)=n2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\,k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt \qquad x\geq 0,\quad n\in\mathbb{N}$$

şeklinde tanımlamıştır.

2007 yılında Erençin ve Taşdelen, (a_n) ve (b_n)

$$\frac{a_n}{b_n}=1+O\left(\frac{1}{b_n}\right)\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$$

olacak şekilde pozitif, artan ve sınırsız herhangi iki dizi ve de $x\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ ve $f\in[0,\infty)$ olmak üzere (1.1) ile verilen $L_n(f;x)$ operatörlerinin

$$L_n^*\left(f;x\right)=2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\,k!}f\left(\frac{k}{b_n}\right) \tag{1.2}$$

şeklinde bir genelleşmesini tanımlayarak, bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini Gadzhiev, [9,10], tarafından ispatlanan ağırlıklı Korovkin teoremi yardımıyla pozitif yarı eksende sürekli olan fonksiyonların ağırlıklı uzaylarında incelemişlerdir, [11].

Daha sonra 2009 yılında Erençin ve Taşdelen (1.2) ile verilen $L_n^*(f;x)$ operatörlerinin

$$K_n\left(f;x\right)=b_n2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\,k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}f(t)\,dt \qquad x\geq 0,\quad n\in\mathbb{N} \tag{1.3}$$

şeklinde bir Kantorovich tipli genelleşmesini tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Burada (a_n) ve (b_n), $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n\geq b_n$ olacak şekilde

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

koşullarını gerçekleyen pozitif, artan ve sınırsız herhangi iki dizi ve de f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ve $[0,\infty)$ un her kompakt alt aralığında sınırlı bir fonksiyondur, [13].

Bu çalışmada ilk olarak Erençin ve Taşdelen, [11], tarafından tanımlanan ve (1.2) ile verilen $L_n^*(f;x)$ operatörleri tanıtılarak bu operatörlerin yaklaşım özellikleri hem

Bohman-Korovkin teoremi hem de ağırlıklı Korovkin teoremi yardımıyla verilmiştir. Ayrıca bu operatörlerin yaklaşım hızları ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla incelenmiştir. Daha sonra yine Erençin ve Taşdelen , [13], tarafından (1.3) ile tanımlanan $K_n(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri Bohman-Korovkin teoremi yardımıyla verilerek, yaklaşım hızları; süreklilik modülü, lokal Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, türevin süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve sahip olduğu temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler ifade ve ispat edilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatör Dizisi

2.1.1. Tanım [7]:

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X den Y ye bir operatör denir.
$f \in X$, $g \in Y$ ve x, g nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f;x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde; t, f nin x, g nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L\big(f(t);x\big) = g(x)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2. Tanım [7]:

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer L operatörü $\forall f_1, f_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir.

2.1.3. Tanım [7]:

$L : X \to Y$ bir operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

2.1.4. Tanım [7]:

Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

2.1.5. Tanım [7]:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n\left(x\right)$ 'e bir "*fonksiyon dizisi*" denir ve $\left(f_n\right)$ ile gösterilir.

2.1.6. Tanım [7]:

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_n\left(f;x\right)$ 'e bir "*operatör dizisi*" denir ve $\left(A_n\right)$ ile gösterilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

2.2.1. Lemma [7]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere $f \le g$ ise $L\left(f;x\right) \le L\left(g;x\right)$ dir.

Buna L lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

2.2.2. Lemma [7]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$\left|L(f)\right| \le L(\left|f\right|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-\left|f\right| \le f \le \left|f\right|$$

dir.

Buna göre L operatörünün monoton artanlığından

$$L\left(-|f|\right) \leq L(f) \leq L\left(|f|\right) \tag{2.1}$$

yazılabilir.
Diğer yandan L nin lineerliğinden

$$L\left(-|f|\right) = -L\left(|f|\right)$$

olup bu eşitliğin (2.1) de kullanılmasıyla

$$-L\left(|f|\right) \leq L(f) \leq L\left(|f|\right)$$

elde edilir.

2.2.3. Tanım [8]:

$\left[a,b\right]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı $C\left[a,b\right]$ ile gösterilir. $C\left[a,b\right]$,

$\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

normu ile bir lineer normlu uzaydır.

2.2.4. Tanım [4]:

Her $x \in \left[a,b\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \max_{a \leq x \leq b} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

ise (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C\left[a,b\right]$uzayında düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

1953 yılında P.P. Korovkin tarafından verilen aşağıdaki teorem, sürekli fonksiyonların sonlu aralıkta lineer pozitif operatörler yardımıyla yaklaştırılmasına ilişkin çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

2.2.5. Teorem [4,7]:

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f$$

olmak üzere her $x \in [a,b]$ ve L_n lineer pozitif operatörü için

i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

ii) $L_n(t;x) \rightrightarrows x$

iii) $L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $a \leq x \leq b$ ve her $f \in C[a,b]$ için

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

sağlanır.

İspat:

Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda f sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki,

$$|t-x| \leq \delta \text{ iken } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

dir.

Üçgen eşitsizliğinden ve hipotezden,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{2.2}$$

yazılabilir.

Eğer $|t-x| > \delta$ ise

$$\frac{|t-x|}{\delta} > 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{2.3}$$

sağlanır.

(2.2) ve (2.3) ten

$$\left|f(t) - f(x)\right| \le 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

dir. O halde,

$$|t-x| \le \delta \quad \text{için} \quad \left|f(t) - f(x)\right| < \varepsilon$$

$$|t-x| > \delta \quad \text{için} \quad \left|f(t) - f(x)\right| \le 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olduğundan her $x, t \in [a,b]$ için,

$$\left|f(t) - f(x)\right| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.4}$$

elde edilir.

Bununla birlikte (i), (ii), (iii) koşullarını gerçekleyen (L_n) operatör dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n\left(f(t);x\right) - f(x) \right\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\left|L_n\left(f(t);x\right) - f(x)\right| = \left|L_n\left(f(t);x\right) - f(x) + L_n\left(f(x);x\right) - L_n\left(f(x);x\right)\right|$$

$$= \left|L_n\left(f(t);x\right) - L_n\left(f(x);x\right) + L_n\left(f(x);x\right) - f(x)\right|$$

Buradan

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|L_n\left(f\left(t\right)-f\left(x\right);x\right)+f\left(x\right)\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|L_n\left(f\left(t\right)-f\left(x\right);x\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right| \tag{2.5}$$

gerçeklenir.

Lemma 2.2.2 (2.5) te kullanılırsa

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)+\left|f\left(x\right)\right|\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

yazılabilir.

Böylece hipotezden

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right)+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|$$

elde edilir.

L_n monoton artan olduğundan ve (2.4) ten

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_n\left(\varepsilon+2M_f\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2};x\right)+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right| \tag{2.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan L_n lineer olduğundan

$$\begin{aligned}L_n\left(\varepsilon+2M_f\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2};x\right)&=L_n\left(\varepsilon;x\right)+L_n\left(2M_f\frac{\left(t-x\right)^2}{\delta^2};x\right)\\&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\end{aligned}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2$$

$$-2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;\, x)\Big]$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;\, x)$$

$$+ x^2 L_n(1;x) - x^2\Big]$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\Big[L_n\big((t^2;x) - x^2\big) + 2x\big(x - L_n(t;x)\big)$$

$$+ x^2\big(L_n(1;x) - 1\big)\Big]$$

elde edilir ki bu son eşitlik (2.6) da yerine yazılırsa

$$\left|L_n(f(t);x) - f(x)\right| \le \varepsilon L_n(1;x)$$

$$+2\frac{2M_f}{\delta^2}\Big[L_n\big((t^2;x) - x^2\big) + 2x\big(x - L_n(t;x)\big) + x^2\big(L_n(1;x) - 1\big)\Big]$$

$$+ M_f\left|L_n(1;x) - 1\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu son eşitsizlikte (i), (ii), (iii) koşulları kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f) - f\right\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

2.2.6. Tanım [9,10]:

$x \in \mathbb{R}$ için

$$\left| f(x) \right| \leq M_f \rho(x)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı B_ρ ile gösterilir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabittir.

B_ρ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı da C_ρ ile gösterilir.

Burada $\rho(x) = 1 + x^2$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, B_ρ ve C_ρ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir.

C_ρ uzayında

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\left| f(x) \right|}{\rho(x)} < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm f fonksiyonlarının uzayı ise C_ρ^* ile gösterilir.

Açıktır ki

$$C_\rho^* \subset C_\rho \subset B_\rho$$

dir.

B_ρ ve C_ρ uzayları

$$\left\| f \right\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\left| f(x) \right|}{\rho(x)}$$

normu ile birer lineer normlu uzaydır.

3. LUPAŞ OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞMESİ

Bu bölümde Lupaş operatörlerinin bir genelleşmesi olan $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörlerinin tanımı ve bazı yaklaşım özellikleri verilecektir.

3.1. $\mathbf{L_n^*\left(f;x\right)}$ Operatörlerinin Tanımı

3.1.1. Tanım [11]:

$\left(a_n\right)$ ve $\left(b_n\right)$,

$$\frac{a_n}{b_n}=1+O\left(\frac{1}{b_n}\right), \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0 \tag{3.2}$$

olacak şekilde pozitif, artan ve sınırsız herhangi iki dizi ve de $x\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ ve $f\in C[0,\infty)$ olmak üzere $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörü

$$L_n^*\left(f;x\right)=2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\,k!}f\left(\frac{k}{b_n}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.2 Lemma [11]:

(2.3) ile verilen $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörü için

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\,k!}=2^{a_nx} \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir.

İspat:

$$\frac{1}{\left(1-a\right)^{\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_k}{k!}a^k,\quad \left|a\right|<1$$

eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{a_n x}}$$

$$=\frac{1}{2^{-a_n x}}$$

$$=2^{a_n x}$$

elde edilir.

Ayrıca burada

$$\left(\alpha\right)_0=1 \text{ ve } \left(\alpha\right)_k=\alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+k-1\right),\ k\geq 1$$

olduğundan

$$\left(a_n x\right)_0=1 \text{ ve } \left(a_n x\right)_k=a_n x\left(a_n x+1\right)_{k-1} \tag{3.5}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.3 Lemma:

$L_n^*(f;x)$ operatörü bir lineer pozitif operatördür.

İspat:

i) $L_n^*(f;x)$ lineerdir.

Her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $f,g\in C[a,b]$ için

$$L_n^*\left(\alpha f(t)+\beta g(t);x\right)=\alpha L_n^*\left(f(t);x\right)+\beta L_n^*\left(g(t);x\right)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
L_n^*\left(\alpha f(t)+\beta g(t);x\right) &= 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)\\
&= 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\alpha f(t)+2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\beta g(t)\\
&= \alpha 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}f(t)+\beta 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}g(t)\\
&= \alpha L_n^*\left(f(t);x\right)+\beta L_n^*\left(g(t);x\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $L_n^*(f;x)$ pozitiftir.

$$L_n^*(f;x)=2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}f\left(\frac{k}{b_n}\right)>0$$

olduğu açıktır.

3.2. $\mathbf{L_n^*}\left(\mathbf{f};\mathbf{x}\right)$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Lemma [11]:

$n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ olmak üzere (3.3) ile verilen $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

i) $L_n^*\left(1;x\right)=1$ (3.6)

ii) $L_n^*\left(t;x\right)=\frac{a_n}{b_n}x$ (3.7)

iii) $L_n^*\left(t^2;x\right)=\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+2\frac{a_n}{b_n^2}x$ (3.8)

İspat:

i) (3.3) ten

$$L_n^*\left(1;x\right) = 2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k k!}1$$

olup (3.4) ten

$$\begin{aligned} L_n^*\left(1;x\right) &= 2^{-a_nx}.2^{a_nx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

ii) (3.3) ten

$$\begin{aligned} L_n^*\left(t;x\right) &= 2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k k!}\frac{k}{b_n} \\ &= \frac{1}{b_n}2^{-a_nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k\left(k-1\right)!} \end{aligned}$$

olup (3.5) ten

$$L_n^*(t;x) = \frac{1}{b_n} a_n x 2^{-a_n x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_{k-1}}{2^k (k-1)!}$$

$$= \frac{a_n}{b_n} x 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^{k+1} k!}$$

$$= \frac{a_n}{b_n} x 2^{-(a_n x+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!}$$

elde edilir. Böylece (3.4) ten

$$L_n^*(t;x) = \frac{a_n}{b_n} x 2^{-(a_n x+1)} . 2^{a_n x+1}$$

$$= \frac{a_n}{b_n} x$$

bulunur.

iii) (3.3) ten

$$L_n^*(t^2;x) = 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} \frac{k^2}{b_n^2}$$

$$= \frac{1}{b_n^2} 2^{-a_n x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k (k-1)!} k$$

olup (3.4) ve (3.5) ten

$$L_n^*(t^2;x) = \frac{1}{b_n^2} 2^{-a_n x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n x (a_n x+1)_{k-1}}{2^k (k-1)!} k$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^{k+1} k!} (k+1)$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k (k-1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x-1} \left[2^{a_n x+1} + (a_n x+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_{k-1}}{2^k (k-1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x + \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x-1} (a_n x+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_{k-1}}{2^k (k-1)!}$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x + \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x-2} (a_n x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_k}{2^k k!}$$

$$= \frac{1}{b_n^2} a_n x + \frac{1}{b_n^2} a_n x 2^{-a_n x-2} (a_n x+1) 2^{a_n x+2}$$

$$= \frac{a_n}{b_n^2} x + \frac{a_n^2}{b_n^2} x^2 + \frac{a_n}{b_n^2} x$$

$$= \frac{a_n^2}{b_n^2} x^2 + 2 \frac{a_n}{b_n^2} x$$

olur.

3.2.2. Teorem:

Her $f \in C[a,b]$ için (3,3) ile verilen $L_n^*(f;x)$ operatörleri f e düzgün yakınsaktır.

İspat:

(3.6), (3.7) ve (3.8) den sırasıyla

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| L_n^*(1;x) - 1 \right| = 0 \;\Rightarrow L_n^*(1;x) \rightrightarrows 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| L_n^*(t;x) - x \right| = 0 \;\Rightarrow L_n^*(t;x) \rightrightarrows x$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| L_n^*(t^2;x) - x^2 \right| = 0 \;\Rightarrow L_n^*(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olacağından Korovkin teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left| L_n^*(f;x) - f(x) \right| = 0 \;\Rightarrow L_n^*(f;x) \rightrightarrows f .$$

3.2.3 Lemma[11]:

(3.3) ile verilen $L_n^*(f;x)$ operatörleri için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

i) $L_n^*\left(t^3;x\right) = \frac{a_n^3}{b_n^3}x^3 + 6\frac{a_n^2}{b_n^3}x^2 + 6\frac{a_n}{b_n^3}x$ (3.9)

ii) $L_n^*\left(t^4;x\right) = \frac{a_n^4}{b_n^4}x^4 + 12\frac{a_n^3}{b_n^4}x^3 + 36\frac{a_n^2}{b_n^4}x^2 + 26\frac{a_n}{b_n^4}x$ (3.10)

İspat:

i) (3.3) ten

$$L_n^*\left(t^3;x\right) = 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\frac{k^3}{b_n^3}$$

olup (3.4) ve (3.5) ten

$$L_n^*\left(t^3;x\right) = 2^{-a_n x}a_n x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_{k-1}}{2^k (k-1)!}\frac{k^2}{b_n^3}$$

$$= 2^{-a_n x}a_n x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_{k-1}}{2^k (k-1)!}\frac{k^2}{b_n^3}$$

$$= 2^{-a_n x}a_n x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^{k+1} k!}\frac{(k+1)^2}{b_n^3}$$

$$= \frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_n x-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!}k^2 + 2.2^{-a_n x-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!}k + 2^{-a_n x-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!}1\right]$$

$$= \frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_n x-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^k (k-1)!}k + 2.2^{-a_n x-1}(a_n x+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+2)_{k-1}}{2^k (k-1)!} + 2^{-a_n x-1}.2^{a_n x+1}\right]$$

$$= \frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_n x-1}(a_n x+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!}(k+1) + 2.2^{-a_n x-1}(a_n x+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!} + 1\right]$$

$$=\frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_nx-1}\left(a_nx+1\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}\left(k-1\right)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}k!}1\right)+2.2^{-a_nx-2}\left(a_nx+1\right)2^{a_nx+2}+1\right]$$

$$=\frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_nx-1}\left(a_nx+1\right)\left(\left(a_nx+2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+3\right)_k}{2^{k+2}k!}+2^{a_nx+1}\right)+2a_nx+3\right]$$

$$=\frac{a_n}{b_n^3}x\left[2^{-a_nx-1}\left(a_nx+1\right)\left(\left(a_nx+2\right)2^{a_nx+1}+2^{a_nx+1}\right)+2a_nx+3\right]$$

$$=\frac{a_n}{b_n^3}x\left[\left(a_nx+1\right)\left(a_nx+2\right)+3a_nx+4\right]$$

$$=\frac{a_n}{b_n^3}x\left(a_n^2x^2+6a_nx+6\right)$$

$$=\frac{a_n^3}{b_n^3}x^3+6\frac{a_n^2}{b_n^3}x^2+6\frac{a_n}{b_n^3}x$$

elde edilir.

ii) (3.3) ten

$$L_n^*\left(t^4;x\right)=2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx\right)_k}{2^k k!}\frac{k^4}{b_n^4}$$

olup (3.4) ve (3.5) ten

$$L_n^*\left(t^4;x\right)=2^{-a_nx}a_nx\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)_{k-1}}{2^k\left(k-1\right)!}\frac{k^3}{b_n^4}$$

$$=2^{-a_nx}a_nx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)_k}{2^{k+1}k!}\frac{\left(k+1\right)^3}{b_n^4}$$

$$=\frac{a_n}{b_n^4}x2^{-a_nx-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)_k}{2^k k!}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)\right]$$

$$= \frac{a_n}{b_n^4} x 2^{-a_n x-1} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} k^3}_{A} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} 3k^2}_{B} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} 3k}_{C} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} 1}_{2^{a_n x+1}} \right]$$

olur.

Buna göre,

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)_k}{2^k k!} k^3$$

$$=(a_n x+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_{k-1}}{2^k (k-1)!} k^2$$

$$=(a_n x+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!} (k+1)^2$$

$$=(a_n x+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!} k^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!} k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+2)_k}{2^{k+1} k!} \right]$$

$$=(a_n x+1) \left[(a_n x+2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_{k-1}}{2^{k+1} (k-1)!} k + 2(a_n x+2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_{k-1}}{2^{k+1} (k-1)!} + 2^{a_n x+1} \right]$$

$$=(a_n x+1) \left[(a_n x+2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_k}{2^{k+2} k!} (k+1) + 2(a_n x+2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_k}{2^{k+2} k!} + 2^{a_n x+1} \right]$$

$$=(a_n x+1) \left[(a_n x+2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_k}{2^{k+2} (k-1)!} + (a_n x+2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+3)_k}{2^{k+2} k!} + 2(a_n x+2) 2^{a_n x+1} + 2^{a_n x+1} \right]$$

$$=(a_n x+1) \left[(a_n x+2)(a_n x+3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n x+4)_{k-1}}{2^{k+2} (k-1)!} + (3a_n x+7) 2^{a_n x+1} \right]$$

$$= (a_n x+1) \left[(a_n x+2)(a_n x+3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+4)_k}{2^{k+3} k!} + (3a_n x+7) 2^{a_n x+1} \right]$$

$$= (a_n x+1) \left[(a_n^2 x^2 + 5a_n x + 6) 2^{a_n x+1} + (3a_n x+7) 2^{a_n x+1} \right]$$

$$= \left(a_n^3x^3 + 5a_n^2x^2 + 6a_nx + a_n^2x^2 + 5a_nx + 6 + 3a_n^2x^2 + 10a_nx + 7\right)2^{a_nx+1}$$

$$= \left(a_n^3x^3 + 9a_n^2x^2 + 21a_nx + 13\right)2^{a_nx+1}$$

dir. (3.4) ve (3.5) ten

$$B = 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)_k}{2^k\,k!}k^2$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_{k-1}}{2^k\,(k-1)!}k$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}\,k!}(k+1)$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}\,k!}k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}\,k!}\right]$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1}\,k!}k + 2^{a_nx+1}\right]$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\left[\left(a_nx+2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+3\right)_{k-1}}{2^{k+1}(k-1)!} + 2^{a_nx+1}\right]$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\left[\left(a_nx+2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+3\right)_k}{2^{k+2}\,k!} + 2^{a_nx+1}\right]$$

$$= 3\left(a_nx+1\right)\left[\left(a_nx+2\right)2^{a_nx+1} + 2^{a_nx+1}\right]$$

$$= 2^{a_nx+1}\left[3\left(a_nx+1\right)\left(a_nx+2\right) + 3\left(a_nx+1\right)\right]$$

$$= 2^{a_nx+1}\left(3a_n^2x^2 + 12a_nx + 9\right)$$

olur. (3.4) ve (3.5) ten

$$C=3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)_k}{2^k k!}k$$

$$=3\left(a_nx+1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_{k-1}}{2^k (k-1)!}$$

$$=3\left(a_nx+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+2\right)_k}{2^{k+1} k!}$$

$$=\left(3a_nx+3\right)2^{a_nx+1}$$

bulunur.

Böylece A, B, ve C

$$L_n^*\left(t^4;x\right)=\frac{a_n}{b_n^4}x2^{-a_nx-1}\left(A+B+C+2^{a_nx+1}\right)$$

ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$L_n^*\left(t^4;x\right)=\frac{a_n}{b_n^4}x2^{-a_nx-1}\left(a_n^3x^3+9a_n^2x^2+21a_nx+13+3a_n^2x^2+12a_nx+9+3a_nx+3+1\right)2^{a_nx+1}$$

$$=\frac{a_n}{b_n^4}x\left(a_n^3x^3+12a_n^2x^2+36a_nx+26\right)$$

$$=\frac{a_n^4}{b_n^4}x^4+12\frac{a_n^3}{b_n^4}x^3+36\frac{a_n^2}{b_n^4}x^2+26\frac{a_n}{b_n^4}x$$

elde edilir.

3.2.4. Teorem [11]:

$\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$T_n:C_\rho\rightarrow B_\rho$$

olacak şekilde $\left(T_n\right)$ lineer pozitif operatör dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(t^v,x\right)-x^v\right\|_\rho=0,\quad v=0,1,2$$

ise bu durumda herhangi bir $f \in C_\rho^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_\rho = 0$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \left\|T_n f^* - f^*\right\|_\rho \geq 1$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho \setminus C_\rho^*$ vardır.

3.2.5. Teorem [11]:

(3.3) ile verilen $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörleri C_ρ dan B_ρ a giden lineer pozitif operatörler olup $f \in C_\rho^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n^* f - f\right\|_\rho = 0$$

dir.

İspat:

Önce belirtelim ki (3.1), (3.2) ve (3.8) den

$$\left\|L_n^*\left(\rho;x\right)\right\|_\rho \leq M_\rho$$

olacak şekilde bir M_ρ sabiti bulunabileceğinden L_n^* operatörleri C_ρ uzayından B_ρ uzayına giden lineer pozitif operatörlerdir, [7].

i) $v=0$ için (3.6) dan

$$\lim_{n\to\infty} \left\|L_n^*(1;x) - 1\right\|_\rho = 0$$

elde edilir.

ii) $v=1$ için (3.7) ve (3.1) den

$$\left\|L_n^*(t;x)-x\right\|_\rho = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|L_n^*(t;x)-x\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{a_n}{b_n}x-x\right|}{1+x^2}$$

$$=\left|\frac{a_n}{b_n}-1\right| \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

$$=O\left(\frac{1}{b_n}\right) \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

elde edilir. Böylece (3.2) den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n^*(t;x)-x\right\|_\rho = 0$$

bulunur.

iii) $v=2$ için (3.8) den

$$\left\|L_n^*(t^2;x)-x^2\right\|_\rho = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|L_n^*(t^2;x)-x^2\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+2\frac{a_n}{b_n}x-x^2\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \left|\frac{a_n^2}{b_n^2}-1\right| \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x^2}{1+x^2}+2\frac{a_n}{b_n^2} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2}$$

olup son eşitsizlikte (3.1) ve (3.2) kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n^*(t^2;x) - x^2 \right\|_\rho = 0$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.4 ten

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n^*(f;x) - f \right\|_\rho = 0$$

elde edilir.

3.2.6. Lemma [11]:

$n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ olmak üzere (3.3) ile verilen $L_n^*\left(f;x\right)$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

i) $L_n^*\left((t-x)^4;x\right) = \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)^4 x^4 + \left(12\frac{a_n^3}{b_n^4} - 24\frac{a_n^2}{b_n^3} + 12\frac{a_n}{b_n^2}\right)x^3 + \left(36\frac{a_n^2}{b_n^4} - 24\frac{a_n}{b_n^3}\right)x^2 + 26\frac{a_n}{b_n^4}x$

ii) $L_n^*\left((t-x)^4;x\right) = O\left(\frac{1}{b_n}\right)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x\right)$

İspat:

$$\text{i) } L_n^*\left((t-x)^4;x\right) = 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k\, k!}\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4$$

$$= 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k\, k!}\left(\frac{k^4}{b_n^4} - 4\frac{k^3}{b_n^3}x + 6\frac{k^2}{b_n^2}x^2 - 4\frac{k}{b_n}x^3 + x^4\right) \tag{3.11}$$

olur. Burada,

$$A = 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k\, k!}\frac{k^4}{b_n^4}$$

$$B = -4x\, 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k\, k!}\frac{k^3}{b_n^3}$$

$$C = 6x^2\, 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k\, k!}\frac{k^2}{b_n^2}$$

$$D=-4x^3 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}.\frac{k}{b_n}$$

$$E=2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}x^4$$

seçildiğinde ve bu eşitlikler sırasıyla (3.10), (3.9), (3.8), (3.7) ve (3.6) dan hesaplandığında,

$$A=\frac{a_n^4}{b_n^4}x^4+12\frac{a_n^3}{b_n^4}x^3+36\frac{a_n^2}{b_n^4}x^2+26\frac{a_n}{b_n^4}x\,,$$

$$B=-4x\left(\frac{a_n^3}{b_n^3}x^3+6\frac{a_n^2}{b_n^3}x^2+6\frac{a_n}{b_n^3}x\right),$$

$$C=6x^2\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+2\frac{a_n}{b_n^2}x\right),$$

$$D=-4x^2\frac{a_n}{b_n},$$

$$E=x^4$$

olarak bulunur. Bu değerler (3.11) de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_n^*\left((t-x)^4;x\right)=\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^4 x^4+\left(12\frac{a_n^3}{b_n^4}-24\frac{a_n^2}{b_n^3}+12\frac{a_n}{b_n^2}\right)x^3+\left(36\frac{a_n^2}{b_n^4}-24\frac{a_n}{b_n^3}\right)x^2+26\frac{a_n}{b_n^4}x$$

elde edilir.

ii) (3.1) ve (i) den

$$L_n^*\left((t-x)^4;x\right)=O\left(\frac{1}{b_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)$$

elde edilir.

3.2.7. Tanım [12]:

$f \in C_\rho^*$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{|h|\le\delta,\, x\in[0,\infty)} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı $\Omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü denir.

3.2.8. Lemma [12]:

$f \in C_\rho^*$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\Omega(f;\delta) \ge 0$

ii) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \le \Omega(f;\delta_2)$

iii) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

iv) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;m\delta) \le 2m(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

v) Herhangi $\lambda > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \le 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f;\delta)$

vi) $|f(t)-f(x)| \le (1+x^2)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)| \le 2(1+\delta^2)(1+x^2)\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\delta)$

3.2.9. Teorem [11]:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C_{\rho}^{*}$ olmak üzere (2.3) ile verilen $L_n^*\left(f;x\right)$ için

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|L_n^*\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(1+x^2\right)^3} \le M\Omega\left(f;b_n^{1/4}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada M, n den bağımsız pozitif bir sabit, $\Omega\left(f;\delta_n\right)$ Tanım 3.2.7 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülüdür.

İspat:

$L_n^*\left(f;x\right)$ operatörleri lineer ve monoton olduğundan

$$\left|L_n^*\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \le L_n^*\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

dir. Lemma 3.2.8 (vii) den

$$\left|L_n^*\left(f;x\right)-f(x)\right| \le L_n^*\left(2\left(1+\delta_n^2\right)\left(1+\frac{\left|\frac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\right)\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right);x\right)$$

$$=2\left(1+\delta_n^2\right)\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}A_1(x) \tag{3.12}$$

elde edilir. $x,\dfrac{k}{b_n}\in[0,\infty)$ olmak üzere

$$A_1(x)=\left(1+\frac{\left|\frac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\right)\left(1+\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right)$$

ifadesini inceleyelim.

i) $\dfrac{\left|\dfrac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\leq 1$ olsun. Bu durumda

$$A_1(x)=\left(1+\dfrac{\left|\dfrac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\right)\left(1+\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2\right)$$

$$\leq\left(1+1\right)(1+\delta_n^2)$$

$$=2(1+\delta_n^2).$$

ii) $\dfrac{\left|\dfrac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\geq 1$ olsun. Bu durumda

$$A_1(x)=\left(1+\dfrac{\left|\dfrac{k}{b_n}-x\right|}{\delta_n}\right)\left(1+\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2\right)$$

$$\leq\left(\dfrac{\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2}{\delta_n^2}+\dfrac{\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2}{\delta_n^2}\right)\left(\dfrac{\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2}{\delta_n^2}+\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2\right)$$

$$=2\dfrac{\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2}{\delta_n^2}\left(\dfrac{\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2+\delta_n^2\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^2}{\delta_n^2}\right)$$

$$=\dfrac{2}{\delta_n^4}\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^4+\dfrac{2}{\delta_n^4}\delta_n^2\left(\dfrac{k}{b_n}-x\right)^4$$

$$= \frac{2}{\delta_n^4}\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4 (1+\delta_n^2).$$

Böylece (i) ve (ii) den

$$A_1(x) \le 2(1+\delta_n^2) + \frac{2}{\delta_n^4}\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4 (1+\delta_n^2)$$

$$= 2(1+\delta_n^2)\left(1 + \frac{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4}{\delta_n^4}\right) \tag{3.13}$$

bulunur.

(3.13), (3.12) de yerine yazılırsa (3.6) dan

$$\left|L_n^*(f;x) - f(x)\right| \le 2\left(1+\delta_n^2\right)\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k k!}2(1+\delta_n^2)\left(1 + \frac{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4}{\delta_n^4}\right)$$

$$= 4\left(1+\delta_n^2\right)^2 \Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k k!}\left(1 + \frac{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4}{\delta_n^4}\right)$$

$$\le 16\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\left(2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k k!}.1 + 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k k!}\frac{\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4}{\delta_n^4}\right)$$

$$= 16\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\left(1 + \frac{1}{\delta_n^4}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k k!}\left(\frac{k}{b_n} - x\right)^4\right)$$

$$=16\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{1}{\delta_n^4}L_n\left(\left(t-x\right)^4;x\right)\right)$$

bulunur. Böylece Lemma 3.2.6 (ii) den

$$\left|L_n^*\left(f;x\right)-f(x)\right|\leq 16\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n^4}O\left(\frac{1}{b_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right]$$

elde edilir. Burada $\delta_n=b_n^{-1/4}$ seçilip her iki taraf $\left(1+x^2\right)^3$ e bölünürse,

$$\frac{\left|L_n\left(f;x\right)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\frac{16\Omega\left(f;b_n^{-1/4}\right)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\left(b_n^{-1/4}\right)^4}O\left(\frac{1}{b_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^3}$$

olur. Buradan da

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{\left|L_n\left(f;x\right)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\leq\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{16\Omega\left(f;b_n^{-1/4}\right)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\left(b_n^{-1/4}\right)^4}O\left(\frac{1}{b_n}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$\leq M\Omega\left(f;b_n^{-1/4}\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

4. LUPAŞ OPERATÖRLERİNİN KANTOROVİCH TİPLİ GENELLEŞMESİ

Bu bölümde (3.3) ile verilen $L_n^*(f;x)$ operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi olan $K_n(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri verilecektir.

4.1. Kantorovich Tipli Operatörlerin Tanımı

4.1.1. Tanım [13]:

(a_n) ve (b_n), $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq b_n$ olacak şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

koşullarını gerçekleyen pozitif, artan ve sınırsız herhangi iki dizi olsun. Ayrıca f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ve $[0,\infty)$ un her kompakt alt aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda $K_n(f;x)$ Kantorovich tipli operatörü

$$K_n(f;x) = b_n 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} \int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} f(t)\,dt \qquad x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

4.1.2. Lemma:

$K_n(f;x)$ operatörü bir lineer pozitif operatördür.

İspat:

i) $K_n(f;x)$ lineerdir.

f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ve $[0,\infty)$ un her kompakt alt aralığında sınırlı herhangi iki fonksiyon ve de $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$K_n\left(\alpha f(t)+\beta g(t);\, x\right)=b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}\left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)dt$$

$$=b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}\alpha f(t)\,dt+b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}\beta g(t)\,dt$$

$$=\alpha b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}f(t)\,dt+\beta b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}g(t)\,dt$$

$$=\alpha K_n\left(f(t);x\right)+\beta K_n\left(g(t);x\right)$$

elde edilir.

ii) $K_n(f;x)$ pozitiftir.

$$K_n(f;x)=b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)^k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}f(t)\,dt\geq 0$$

olduğu açıktır.

4.2. $\mathbf{K_n(f;x)}$ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

4.2.1. Lemma [13]:

(4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

i) $K_n(1;x)=1$ (4.2)

ii) $K_n(t;x)=\dfrac{a_n}{b_n}x+\dfrac{1}{2b_n}$ (4.3)

iii) $K_n(t^2;x)==\dfrac{a_n^2}{b_n^2}x^2+3\dfrac{a_n}{b_n^2}x+\dfrac{1}{3b_n^2}$ (4.4)

İspat:

i) (4.1) ve (3.4) ten

$$K_n(1;x)=b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} 1\,dt$$

$$=b_n 2^{-a_n x}2^{a_n x}\left(\frac{k+1}{b_n}-\frac{k}{b_n}\right)$$

$$=1$$

dir.

ii) (4.1), (3.5) ve (3.4) ten

$$K_n(t;x) = b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} t\,dt$$

$$= \frac{b_n}{2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\left[\left(\frac{k+1}{b_n}\right)^2-\left(\frac{k}{b_n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2b_n}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}(2k+1)$$

$$= \frac{1}{2b_n}2^{-a_n x+1}a_n x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_{k-1}}{2^k (k-1)!}+\frac{1}{2b_n}2^{-a_n x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}$$

$$= \frac{1}{b_n}2^{-a_n x}a_n x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)_k}{2^{k+1} k!}+\frac{1}{2b_n}$$

$$= \frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{2b_n}$$

bulunur.

iii) (4.1) den

$$K_n\left(t^2;x\right) = b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} t^2\ dt$$

$$= b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}\frac{1}{3}\left[\frac{\left(k+1\right)^3-k^3}{b_n^{\ 3}}\right]$$

$$= \frac{1}{3b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}\left(3k^2+3k+1\right) \qquad (4.5)$$

yazabiliriz. Burada

$$A=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}3k^2$$

$$B=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}3k$$

$$C=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}1$$

olmak üzere sırasıyla bu ifadeleri hesaplayalım.

$$A=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}3k^2$$

$$= \frac{1}{b_n^2}2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_n x\right)_k}{2^k\,k!}k^2$$

$$= L_n^*\left(t^2,x\right)$$

olup (3.8) den

$$A = \frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+2\frac{a_n}{b_n^2}x$$

bulunur.

(3.3) ve (3.7) den

$$B=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx)_k}{2^k\,k!}3k$$

$$=\frac{1}{b_n}\frac{1}{b_n}2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx)_k}{2^k\,k!}k$$

$$=\frac{1}{b_n}L_n^*(t;x)$$

$$=\frac{a_n}{b_n^2}x$$

bulunur. Diğer yandan

$$C=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx)_k}{2^k\,k!}1$$

olduğundan (3.4) ten

$$C=\frac{1}{3b_n^2}2^{-a_nx}2^{a_nx}$$

$$=\frac{1}{3b_n^2}$$

bulunur.

A, B ve C değerleri (4.5) te yerine yazılırsa

$$K_n(t^2;x)=A+B+C$$

$$=\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+2\frac{a_n}{b_n^2}x+\frac{a_n}{b_n^2}x+\frac{1}{3b_n^2}$$

$$=\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+3\frac{a_n}{b_n^2}x+\frac{1}{3b_n^2}$$

elde edilir.

4.2.2. Teorem:

Her $f \in C[a,b]$ için $K_n(f;x)$ operatörleri f e düzgün yakınsaktır.

İspat:

(4.2), (4.3) ve (4.4) ten sırasıyla

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left|K_n(1;x)-1\right| = 0 \;\Rightarrow K_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left|K_n(t;x)-x\right| = 0 \;\Rightarrow K_n(t;x) \rightrightarrows x$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left|K_n(t^2;x)-x^2\right| = 0 \;\Rightarrow K_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olup Korovkin teoreminden

$$K_n(f;x) \rightrightarrows f$$

dir.

4.2.3 Lemma[13]:

(4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörleri için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

i) $K_n\left((t-x);x\right)=\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)x+\frac{1}{2b_n}$ (4.6)

ii) $K_n\left((t-x)^2;x\right)=\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2 x^2+\left(\frac{3a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}$ (4.7)

İspat:

i) $K_n(f;x)$ operatörlerinin lineerliğinden

$$K_n\left((t-x);x\right)= K_n(t;x)-xK_n(1;x)$$

olup (4.2) ve (4.3) ten

$$K_n\left((t-x);x\right)=\frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{2b_n}-x$$

$$=\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)x+\frac{1}{2b_n}$$

bulunur.

ii) $K_n\left(f;x\right)$ operatörlerinin lineerliğinden

$$K_n\left((t-x)^2;x\right)=K_n\left(\left(t^2-2tx+x^2\right);x\right)$$

$$=K_n\left(t^2;x\right)-2xK_n\left(t;x\right)+x^2K_n\left(1;x\right)$$

yazabiliriz. Bu durumda (4.2), (4.3) ve (4.4) ten

$$=\frac{a_n^2}{b_n^2}x^2+3\frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{3b_n^{\,2}}-2x\left(\frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{2b_n}\right)+x^2$$

$$=\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}-2\frac{a_n}{b_n}+1\right)x^2+\left(3\frac{a_n}{b_n}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}$$

$$=\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2x^2+\left(3\frac{a_n}{b_n}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}$$

elde edilir.

5. KANTOROVİCH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM HIZI

Bu bölümde süreklilik modülü, lokal Lipschitz sınıfından fonksiyonlar, türevin süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla (4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım hızı hesaplanacaktır.

5.1. Süreklilik Modülü İle Yaklaşım Hızı

5.1.1 Tanım [14]:

$<a,b>$ ifadesi $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,b)$, (a,∞) aralıklarından herhangi birini göstersin. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{t,x\in<a,b> \\ |t-x|\le\delta}} |f(t)-f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

5.1.2. Lemma [14]:

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\omega(f;\delta) \ge 0$

ii) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$

iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$

iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v) f fonksiyonunun $<a,b>$ aralığında düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f;\delta) = 0$ olmasıdır.

vi) $|f(t)-f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)| \le \left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

İspat:

i) Süreklilik modülü, tanımı gereğince bir mutlak değerin supremumu olduğundan $\omega(f;\delta)\geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $0<\delta_1<\delta_2$ için $|t-x|\leq\delta_2$ özelliğini sağlayan (t,x) sayı çiftleri kümesi $|t-x|\leq\delta_1$ koşulunu sağlayan (t,x) sayı çiftlerinin kümesinden daha geniştir. Kümelerde en küçük üst sınır kavramını düşünecek olursak;

$$\omega(f;\delta_1)\leq\omega(f;\delta_2)$$

dir.

iii) Süreklilik modülünün tanımından dolayı;

$$\omega(f;m\delta)=\sup_{\substack{t,x\in<a,b>\\|t-x|\leq\delta}}|f(t)-f(x)|$$

yazabiliriz.

$$|t-x|\leq m.\delta \;\Rightarrow\; x-m\delta\leq t\leq x+m\delta$$

olup, $t=x+mh$ olarak seçildiğinde

$$|h|\leq\delta \text{ ve } \omega(f;m\delta)=\sup_{\substack{t,x\in<a,b>\\|t-x|\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\sup_{\substack{t,x\in<a,b>\\h\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|=\sup_{\substack{t,x\in<a,b>\\h\leq\delta}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left[f(x+(k+1)h)-f(x+kh)\right]\right|$$

olup sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{t,x\in<a,b>\\h\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|\leq\sum_{k=0}^{m-1}|f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|$$

$$\leq\omega(f;\delta)+...+\omega(f;\delta)$$

$$\leq m\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

iv) λ sayısının tam kısmını m ile gösterelim. $[\![\lambda]\!]=m$ olsun. Buradan $m\leq\lambda<m+1$ ise $m+1\leq\lambda+1<m+2$ yazılabilir.

Lemma 4.1.2 (ii) den

$$\omega(f;\lambda\delta) \le \omega\left(f;(m+1)\delta\right)$$

$$\le (m+1)\,\omega(f;\delta)$$

$$\le (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$$

elde edilir.Sonuç olarak

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\,\omega(f;\delta)$$

yazılır ki bu da ispatı tamamlar.

v) $(\Rightarrow)$: $|t-x| \le \delta$ eşitsizliğindeki $\delta \to 0$ yaklaşması $t \to x$ olması demektir. Dolayısıyla f fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan süreklilik tanımı gereğince

$$t \to x \text{ için } |f(t)-f(x)| \to 0$$

olduğundan ispatı açıktır.

$(\Leftarrow)$: $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega(f;\delta) = 0$ olsun. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\eta > 0$ vardır ki $\delta > \eta$ olduğunda

$$\sup_{\substack{t,x\in <a,b> \\ |t-x|\le\delta}} |f(t)-f(x)| < \varepsilon$$

dir. Bu ise her $t,x \in <a,b>$ ve $|t-x| < \delta \le \eta$ için doğru olduğundan f fonksiyonu düzgün süreklidir.

vi) $\omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta = |t-x|$ seçersek,

$$\omega\left(f;|t-x|\right) = \sup_{x\in <a,b>} |f(t)-f(x)|$$

elde edilir. O halde supremumun özelliğinden $|f(t)-f(x)|$ lerin supremumu $\omega\left(f;|t-x|\right)$ olacağından;

$$|f(t)-f(x)| \le \omega\left(f;|t-x|\right)$$

yazılır.

vii) Lemma 5.1.2 (vi) den

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$

yazılabilir. Diğer taraftan bu eşitsizlikte Lemma 5.1.2 (iv) özelliğini kullanırsak;

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

5.1.3 Teorem[13]:

f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ve $[0,\infty)$ un her kompakt alt aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörü için

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right| \le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada

$$\delta_{n,x} = \left[\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2 x^2 + \left(3\frac{a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x + \frac{1}{3b_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.1}$$

dir.

İspat:

$K_n(f;x)$ operatörleri lineer ve monoton olduğundan

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right| \le b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}\left|f(t)-f(x)\right|dt \tag{5.2}$$

yazılabilir. Diğer yandan Lemma 5.1.2 (iv) ve (vi) den

$$\left|f(t)-f(x)\right| \le \left(\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+1\right)\omega(f;\delta)$$

olup bu eşitsizlik (5.2) de kullanılırsa, (3.6) dan

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta^2}\left[b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)^k}{2^k k!}\int_{\frac{k_n}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}(t-x)^2\,dt\right]+1\right\}$$

$$=\omega(f;\delta)\left[\frac{1}{\delta^2}K_n\left((t-x)^2;x\right)+1\right]$$

olur. (4.7) den

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\le\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta^2}\left[\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2x^2+\left(3\frac{a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}\right]+1\right\}$$

bulunur. Burada

$$\delta=\delta_{n,x}=\left[\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2x^2+\left(3\frac{a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

alınırsa,

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)\left(\frac{1}{\delta_{n,x}^2}\delta_{n,x}^2+1\right)$$

elde edilir ki buradan da,

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f;\delta_{n,x}\right)$$

olur.

5.1.4 Teorem [13]:

f, $[a,b]$ üzerinde diferansiyellenebilir ve $f\in C'[a,b]$ olsun. Bu durumda $x\in[a,b]$ olmak üzere (4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörleri için

$$\left|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|f'(x)\right|\left[\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)x+\frac{1}{2b_n}\right]+2\delta_{n,x}\omega\left(f';\delta_{n,x}\right)$$

olur. Buradaki $\delta_{n,x}$, (5.1) de verilen değerdir.

İspat:

Ortalama Değer Teoreminden

$$f(t)-f\left(x\right)=f'(\xi)(t-x)$$

olacak şekilde $\xi\in(t,x)$ vardır. Ayrıca Lemma 5.1.2 (vi) ve (vii) den

$$\begin{aligned}\left|f'(\xi)-f'(x)\right|&\leq\omega\left(f';\left|\xi-x\right|\right)\\&\leq\left(1+\frac{\left|\xi-x\right|}{\delta}\right)\omega\left(f';\delta\right).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Diğer yandan $K_n(f;x)$ operatörleri lineer ve monoton ve de $K_n(1;x)=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}K_n(f;x)-f(x)&=K_n\left(\left[f'(\xi)-f'(x)\right](t-x);x\right)+f'(x)K_n(t-x;x)\\&=K_n\left(\left[f'(\xi)-f'(x)\right](t-x);x\right)+f'(x)\left[K_n(t;x)-x\right]\end{aligned}$$

yazılabilir ki üçgen eşitsizliğinden,

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\leq K_n\left(\left|f'(\xi)-f'(x)\right|\left|t-x\right|;x\right)+\left|f'(x)\right|\left|K_n(t;x)-x\right|\tag{5.4}$$

elde edilir. (5.3), (5,4) te yerine yazılırsa

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\leq\left|f'(x)\right|\left|K_n(t;x)-x\right|+\omega(f';\delta)K_n\left(\left|t-x\right|;x\right)+\omega(f';\delta)\frac{1}{\delta}K_n\left((t-x)^2;x\right)$$

bulunur.

Eşitsizliğin ikinci toplamına Cauchy-Swarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|\leq\left|f'(x)\right|\left|K_n(t;x)-x\right|+\omega(f';\delta)\left(K_n\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}+\omega(f';\delta)\frac{1}{\delta}K_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=\left|f'(x)\right|\left|K_n(t;x)-x\right|+\omega(f';\delta)\left(K_n\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}x\left[1+\frac{1}{\delta}\left(K_n\left((t-x)^2;x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

elde edilir. (4.3) ve (4.7) den

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right|=\left|f'(x)\right|\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)x+\frac{1}{2b_n}\right\}+\left(\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2x^2+\left(\frac{3a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)^2x^2+\left(\frac{3a_n}{b_n^2}-\frac{1}{b_n}\right)x+\frac{1}{3b_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\omega(f';\delta)$$

olur ki burada (5.1) ile verilen $\delta_{n,x}$ için $\delta=\delta_{n,x}$ alınırsa ispat tamamlanır.

5.2. Lokal Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızı

5.2.1 Tanım[14] :

$M>0$ ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $(x,t)\in[a,b]x[0,\infty)$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara $[a,b]$ üzerinde lokal Lipschitz sınıfından fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonların sınıfı lokal $Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

5.2.2 Teorem[14] :

$f \in$ lokal $Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda (4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörleri için

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right| \le M\delta_{n,x}^{\alpha}$$

olur. Burada verilen $\delta_{n,x}$, (5.1) ile verilen ifadedir.

İspat:

$K_n(f;x)$ operatörleri lineer ve monoton olduğundan ve de hipotezden

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right| \le b_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}\left|f(t)-f(x)\right|dt$$

$$\le Mb_n 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}|t-x|^{\alpha}\,dt \tag{5.5}$$

yazılabilir. $p=\dfrac{2}{\alpha}$ ve $q=\dfrac{2}{2-\alpha}$ seçerek integrallenebilir fonksiyonlar için (5.5) e Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|K_n(f;x)-f(x)\right| \le Mb_n\sum_{k=0}^{\infty}2^{-a_n x}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}1.|t-x|^{\alpha}\,dt$$

$$\le Mb_n\sum_{k=0}^{\infty}2^{-a_n x}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\left(\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}|t-x|^{2}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}dt\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

$$= Mb_n\left(\frac{1}{b_n}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-a_n x}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}\left(\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}|t-x|^{2}\,dt\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$= Mb_n^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a_n x} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} \left(\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}} (t-x)^2 \, dt \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. $L_n^*(1;x) = 1$ olmasını dikkate alarak ve $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçerek L_p uzayları için Hölder eşitsizliği son eşitsizliğe tekrar uygulanırsa

$$\left| K_n(f;x) - f(x) \right| \leq M \left[K_n((t-x)^2;x) \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

elde edilir. Bu durumda (4.1) de verilen $\delta_{n,x}$ alınırsa

$$\left| K_n(f;x) - f(x) \right| \leq M \delta_{n,x}^{\alpha}$$

bulunur.

5.3. Peetre-K Fonksiyoneli ile Yaklaşım Hızı

5.3.1 Tanım [13]:

$f \in C[a,b]$, $\delta \geq 0$ olmak üzere

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C^2[a,b]} \left\{ \|f-g\|_{C[a,b]} + \delta \|g\|_{C^2[a,b]} \right\} \tag{5.6}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Peetre-K fonksiyoneli denir.

Burada

$$\|f\|_{C^2[a,b]} = \|f\|_{C[a,b]} + \|f'\|_{C[a,b]} + \|f''\|_{C[a,b]}$$

dir.

5.3.2 Teorem [13]:

$f \in C[0,b]$ ve $1 \le b < \infty$ olmak üzere (4.1) ile verilen $K_n(f;x)$ operatörleri için

$$\left\| K_n(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,b]} \le 2K(f;\delta_n)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Burada $K(f;\delta_n)$, (5.6) ile verilen Peetre-K fonksiyoneli ve

$$\delta_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_n^{\,2}}{2b_n^2} + \frac{a_n}{b_n} - \frac{3}{2}\right)b^2 + \left(\frac{3a_n}{2b_n^2} - \frac{1}{2b_n}\right)b + \frac{1}{6b_n^2}\right]$$

dir.

İspat:

$g \in C^2[a,b]$ alalım. Taylor açılımından

$$K_n(g;x) = K_n\left(g(x) + g'(x)(t-x) + \frac{1}{2}g''(x)(t-x)^2 ; x \right)$$

$$= g(x) + g'(x)K_n\left((t-x);x\right) + g''(x)\frac{1}{2}K_n\left((t-x)^2;x\right)$$

olur ki buradan da

$$\left|K_n(g;x) - g(x)\right| \le \left|g'(x)\right|\left|K_n\left((t-x);x\right)\right| + \frac{1}{2}\left|g''(x)\right|\left|K_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \qquad (5.7)$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$\left|K_n\left((t-x)^2;x\right)\right| \le \left|K_n\left(t^2;x\right) - x^2\right| + 2x\left|K_n(t;x) - x\right| \qquad (5.8)$$

olup (5.8), (5.7) de yerine yazılırsa

$$\left|K_n(g;x) - g(x)\right| \le \left|g'(x)\right|\left|K_n\left((t-x);x\right)\right| + \frac{1}{2}\left|g''(x)\right|\left\{\left|K_n\left(t^2;x\right) - x^2\right| + 2x\left|K_n(t;x) - x\right|\right\}$$

olur.

(4.3), (4.4) ve (4.7) den

$$\left|K_n\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\left|g''\left(x\right)\right|\left[\left(\frac{a_n{}^2}{2b_n^2}+\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{2}\right)x^2+\left(\frac{3a_n}{2b_n^2}+\frac{1}{2b_n}\right)x+\frac{1}{6b_n^2}\right]$$

$$+\left|g'\left(x\right)\right|\left[\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)x+\frac{1}{2b_n}\right]$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\|K_n\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right\|_{C[o,b]}\leq\left(\left\|g'\right\|_{C[o,b]}+\left\|g''\right\|_{C[o,b]}\right)$$

$$\text{x}\left[\left(\frac{a_n^2}{2b_n^2}+\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{2}\right)b^2+\left(\frac{3a_n}{2b_n^2}+\frac{1}{2b_n}\right)b+\frac{1}{6b_n^2}\right]$$

$$\leq\left\|g\right\|_{C^2[0,b]}\left[\left(\frac{a_n^2}{2b_n^2}+\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{2}\right)b^2+\left(\frac{3a_n}{2b_n^2}+\frac{1}{2b_n}\right)b+\frac{1}{6b_n^2}\right] \qquad (5.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan $K_n(f;x)$ operatörleri lineer olduğundan

$$\left|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|K_n\left(f-g;x\right)\right|+\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|+\left|K_n\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|$$

yazılabilir. Buradan

$$\left\|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,b]}\leq2\left\|f-g\right\|_{C[0,b]}+\left\|K_n\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right\|_{C[0,b]} \qquad (5.10)$$

bulunur.

(5.9), (5.10) de yerine yazılırsa

$$\left\|K_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C[0,b]}\leq2\left\|f-g\right\|_{C[0,b]}+\left\|g\right\|_{C^2[0,b]}\left[\left(\frac{a_n^2}{2b_n^2}+\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{2}\right)b^2+\left(\frac{3a_n}{2b_n^2}+\frac{1}{2b_n}\right)b+\frac{1}{6b_n^2}\right]$$

$$\leq2\left\{\left\|f-g\right\|_{C[0,b]}+\left\|g\right\|_{C^2[0,b]}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_n^2}{2b_n^2}+\frac{a_n}{b_n}-\frac{3}{2}\right)b^2+\left(\frac{3a_n}{2b_n^2}+\frac{1}{2b_n}\right)b+\frac{1}{6b_n^2}\right]\right\}$$

bulunur.

İnfimum alınıp

$$\delta_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_n^{\ 2}}{2b_n^2} + \frac{a_n}{b_n} - \frac{3}{2}\right)b^2 + \left(\frac{3a_n}{2b_n^2} + \frac{1}{2b_n}\right)b + \frac{1}{6b_n^2}\right]$$

seçilirse

$$\left\| K_n\left(f;x\right) - f\left(x\right) \right\| \leq 2K\left(f;\delta_n\right)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K., “Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Funktionen reler Argumente”, ***Sitzungsberichte der Acad.***, Berlin, 633-639, 789-805 (1885).

2. Bernstein, S.N., “Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilities”, ***Comm. Soc. Math. Charkow Ser.,*** 2(13):1-2 (1912).

3. Bohman, H., “On approximation of continuous and analytic functions”, ***Arkif Für Math.***, 2(3): 43-56 (1951).

4. Korovkin, P.P., “On convergence of linear positive operators in the space of continous functions”, ***Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)***, 90: 961-964 (1953).

5. Lupaş, A., “The approximation by some positive operators”, In: Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory (M.W. Müler et al., eds), ***Akademie Verlag***, Berlin, 201-209 (1995).

6. Agratini, O., “On a sequence of linear positive operators”, ***Facta Universitatis (Nis), Ser. Math. İnform.,*** 14:41-48 (1999).

7. Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı”, ***A.Ü.F.F. Döner Sermayesi İşletmesi Yayınları,*** Ankara, 1-20 (1995).

8. Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, ***Balcı Yayınları,*** Kütahya, 27-83 (2000).

9. Gadzhiev, A.D., “On P.P. Korovkin type theorems”, ***Math. Zametki,*** 20:781-786 (1976), ***Math. Notes,*** 20:995-998 (1976).

10. Gadzhiev, A.D., “The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin”, ***Soviet Math. Dokl.,*** 15:1433-1436 (1974).

11. Erençin, A., Taşdelen, F., “On a family of linear and pasitive operators in weighted spaces”, ***J. İnequal. Pare Appl. Math.,*** 8(2): article 39, 6 (2007)

12. İspir, N., “On modified Baskakov operators on weighted spaces”, ***Turk. J. Math.,*** 25:355-365 (2001).

13. Erençin, A., Taşdelen, F., “On certain kantorovich type operators”, ***Fasciculi Mathematici,*** 41:25-36 (2009).

14. Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-type Approximation Theory and its Applications”, de Gruyter Studies in Mathematics, 17. ***Walter de Gryter***, Berlin, New York, xii+627 (1994).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : AKKAYA, Hamza

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve Yeri : 20.10.1978 Trabzon

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2013
Lisans	19 Mayıs Üniversitesi/ Matematik Öğretmenliği	1998
Lise	İstanbul Pertevniyal Lisesi	1994

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, satranç, sinema.